Rozwiązania ogólne – przypadki specjalne

Wsród D nie podlegających pod rozwiązania RGI–XI znajdują się D, które mają takie własności, że obliczenia y nie przedstawiają problemu i to będą omówione niżej przypadki specjalne.

Oprócz sprawdzenia czy dane D nie podlega pod RGI–XI sprawdzamy też czy opisane na stronach 18,19,20 sposoby znajdowania rozwiązań mają zastosowanie do danego D. Jeżeli nie to mamy do czynienia z D które być może da się rozwiązać metodami przedstawionymi w tym rozdziale.

Rozwiązywanie tych przypadków polega na znalezieniu wartości p_n ("czerwonej", tej z dolnego ramienia jak w przykładach dla D = 19, D = 74 i D = 13, bo to p_n najmniejsze) i następnie przejście do y lub v_2.

W poprzednich rozdziałach powiedzieliśmy o liczbach 2, 3, 5, że posługiwanie się nimi często pozwala na szybkie znalezienie rozwiązania RP. Teraz rozszerzymy ten zbiór. Okazuje się, że liczby 0, 1, 2, 3, 5 lub te same liczby pomnożone przez 2^k to bardzo często wartości p_n. Co można było zauważyć w poprzednio podanych przykładach. Począwszy od t = 5 o liczbach postaci $t^2 \pm 1,2,4$ mogliśmy bez sprawdzania ich własności powiedzieć do jakiej grupy należą. Dla mniejszych wartości t mamy pod tym względem problem. Proszę popatrzeć:

t^2 D	t^2 D	t^2 D	t^2 D	t^2 D	t^2 D
$1^2 - 1 = 0$	$0^2 + 1 = 1$	$0^2 + 2 = 2$	$1^2 + 2 = 3$	$0^2 + 4 = 4$	$1^2 + 4 = 5$
$2^2 - 4 = 0$		$1^2 + 1 = 2$	$2^2 - 1 = 3$		$2^2 + 1 = 5$
		$2^2 - 2 = 2$			$3^2 - 4 = 5$

Bardzo możliwe, że jest to powodem tak częstego występowania tych liczb jako p_n. A nawet jeśli nie to warto to sprawdzać. Najciekawszą z powyższych liczb jest 2. Należy do aż czterech grup, podczas gdy wszystkie pozostałe do co najwyżej dwóch.

$+1 + 2\cdot 2^2 = 3^2$	grupa "+1"
$-1 + 2\cdot 1^2 = 1^2$	grupa "−1"
$+2 + 2\cdot 1^2 = 2^2$	grupa "+2"
$-2 + 2\cdot 1^2 = 0^2$	grupa "−2"

Do tego opracowania dodano tablice liczb D od 2 do 300 z danymi co do rozkładu i wartości p_n. Chociażby pobieżne zapoznanie się z nimi przed lekturą tego rozdziału jest jak najbardziej wskazane.

Wszystkie opisywane na następnych stronach metody znajdowania rozwiązania RP polegają na próbach znalezienia p_n dla danego D i potem przejścia do y lub v_2. I jak zobaczymy często jest to nadzwyczaj proste. Bywa jednak tak, że znajdujemy wyglądające poprawnie równanie z jakimś p_n, które nie daje rozwiązania. Dzieje się tak kiedy $\pm 1,2,4\,\alpha^n$ i $\mathrm{D}p_{n-1}^2$ w równaniu

$$\pm 1,2,4\,\alpha^n + \mathrm{D}p_{n-1}^2 = m^2$$

mają wspólne podzielniki. a my znaleźliśmy równanie już po uproszczeniu (bo jest to oczywiście łatwiejsze). Jak postępować w takich przypadkach zostanie pokazane na przykładach, a takie równania będziemy nazywać równaniami uproszczonymi.

Omówimy teraz poszczególne przypadki specjalne.

PS1 – przypadek specjalny 1

— sprawdzamy czy jednym ze składników rozkładu jest liczba a w potędze drugiej lub wyższej,

D = 41 $\quad 41 = 6^2 + 5 \longrightarrow t = 6 \quad a = 5$ znak "+" grupa "−1"

$41 = 5^2 + 4^2$ znaleźliśmy rozkład liczby D odpowiadający grupie "−1"

$-5^2 + 41\cdot 1^2 = 4^2$ rozkład liczby D przekształcony do postaci ORP

stąd $p_1 = 1 \quad n = 0$

(3) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 2\cdot 6\cdot 1\, p_0 + (5 - 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 12\, p_0 + 4 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 8$

(4) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 2\cdot 6\cdot 1\, p_0 - (5 + 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 12\, p_0 - 6 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{264}$

$p_0 = \frac{12+8}{10} = 2 \qquad p_0 = \frac{12-8}{10} = \frac{4}{10}$ odpada

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 6\cdot 2 + 1}{5} = 5$

$41\cdot 5^2 = 32^2 + 1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow t = 32 \quad 2t = 64 \quad v_1 = 64$

$y = v_1\cdot v_2 = 64\cdot 5 = 320$

$1 + 41\cdot 320^2 = 2049^2$

Tak wygląda pełne "ręczne" rozwiązanie dla D = 41. Na końcu tego rozdziału (strona 100) znajduje się program do którego należy wpisać wartości t, a, p_n, n i zaznaczyć odpowiednie równanie, żeby otrzymać wartości kolejnych p_n i v_2 lub y. Kiedy znamy v_2 lub y kolejny program (strona 101) pozwala na wyznaczanie p_n. Wskazane jest wypróbowanie tych programów biorąc przykłady z tego opracowania.

D = 61 $\quad 61 = 8^2 - 3 \longrightarrow t = 8 \quad a = 3$ znak "−" grupa "±4,−1"

$61 = 5^2 + 4\cdot 3^2$

$-4\cdot 3^2 + 61\cdot 1^2 = 5^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

(7) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 2\cdot 8\cdot 1\, p_0 - (4\cdot 3 - 1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 16\, p_0 - 11 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{388}$

(12) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 2\cdot 8\cdot 1\, p_0 + (4\cdot 3 + 1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 16\, p_0 + 13 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 10$

$p_0 = \frac{16+10}{6} = \frac{26}{6}$ odpada $\qquad p_0 = \frac{16-10}{6} = 1$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 8\cdot 1 - 1}{3} = 5$

$61\cdot 5^2 = 39^2 + 4 \longrightarrow$ RGVIII $\longrightarrow t = 39 \quad t_1 = 19$

$v_1 = 4(2\cdot 19 + 1)(19^2 + 19 + 1)(2\cdot 19^2 + 2\cdot 19 + 1) = 45230796$

$y = v_1\cdot v_2 = 5\cdot 45230796 = 226153980$

$1 + 61\cdot 226153980^2 = 1766319049^2$

D = 69 $\quad 69 = 8^2 + 5 \longrightarrow t = 8 \quad a = 5$ znak "+" grupa "+4"

$69 = 13^2 - 4\cdot 5^2$

$4\cdot 5^2 + 69\cdot 1^2 = 13^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

(1) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 2\cdot 8\cdot 1\, p_0 + (4\cdot 5 - 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 16\, p_0 + 19 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{-124}$

(6) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 2\cdot 8\cdot 1\, p_0 - (4\cdot 5 + 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 16\, p_0 - 21 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 26$

$p_0 = \frac{16+26}{10} = \frac{42}{10}$ odpada $\qquad p_0 = \frac{16-26}{10} = -1$

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 8(-1) + 1}{5} = -3$

$69(-3^2) = 25^2 - 4 \longrightarrow$ RGVII $\longrightarrow t = 25 \quad t_1 = 12 \quad v_1 = 312$

$y = v_1 \cdot v_2 = 312(-3) = -936$

$1 + 69(-936)^2 = 7775^2$

D = 73 $\quad 73 = 9^2 - 8 \longrightarrow t = 9 \quad a = 8$ znak "−" grupa "−1"

$73 = 8^2 + 3^2$

$-8^2 + 73 \cdot 1^2 = 3^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

Ten przykład wydaje się być podobny do poprzedniego, ale jest tu pewien problem. Liczba p_1 jest nieparzysta, a dla a parzystych tak nie może być, co wynika z wzoru:

$v_2 = \dfrac{2tp_0 \pm p_1}{a}$ — jeżeli a jest parzyste to p_1, p_2, p_3.... także muszą być parzyste (p_0 może być nieparzyste)

Radzimy sobie z tym mnożąc obie strony równania przez 8^2, dzięki czemu zachowujemy wielkość a i odpowiedni znak, oraz uzyskujemy parzyste p_3.

$-8^2 + 73 \cdot 1^2 = 3^2 / 8^2$

$-8^4 + 73 \cdot 8^2 = 24^2 \longrightarrow p_3 = 8 \quad n = 2$

To właśnie jeden z tych przypadków kiedy równanie, które zostało uproszczone znaleźliśmy pierwsze i odtworzyliśmy poprawne równanie.

9 $ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8p_2 - (8^3 - 8^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 144p_2 - 448 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{35072}$

10 $ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8p_2 + (8^3 + 8^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 144p_2 + 576 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 48$

$p_2 = \dfrac{144 + 48}{16} = 12 \qquad p_2 = \dfrac{144 - 48}{16} = 6$

Otrzymaliśmy dwie całkowite wartości dla p_2 (12 i 6). Zdarza się to niezbyt często i należy sprawdzić każdą z nich.

$p_1 = \dfrac{2tp_2 - p_3}{a} = \dfrac{2 \cdot 9 \cdot 12 - 8}{8} = 26 \qquad p_1 = \dfrac{2 \cdot 9 \cdot 6 - 8}{8} = 12.5$ odpada

W równaniu uproszczonym mamy $p_1 = 1$ podczas gdy poprawna wartość to 26.

$p_0 = \dfrac{2tp_1 - p_2}{a} = \dfrac{2 \cdot 9 \cdot 26 - 12}{8} = 57$

$v_2 = \dfrac{2tp_0 - p_1}{a} = \dfrac{2 \cdot 9 \cdot 57 - 26}{8} = 125$

$73 \cdot 125^2 = 1068^2 + 1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow t = 1068 \quad 2t = 2136 \quad v_1 = 2136$

$y = v_1 \cdot v_2 = 2136 \cdot 125 = 267000$

$1 + 73 \cdot 267000^2 = 2281249^2$

D = 86 $\quad 86 = 9^2 + 5 \longrightarrow t = 9 \quad a = 5$ znak "+" grupa "−2"

$86 = 6^2 + 2 \cdot 5^2$

$-2 \cdot 5^2 + 86 \cdot 1^2 = 6^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

2 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 2 \cdot 9 \cdot 1\, p_0 + (2 \cdot 5 - 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 18\, p_0 + 9 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 12$

5 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 2 \cdot 9 \cdot 1\, p_0 - (2 \cdot 5 + 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 18\, p_0 - 11 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{544}$

$p_0 = \dfrac{18 + 12}{10} = 3 \qquad p_0 = \dfrac{18 - 12}{10} = \dfrac{6}{10}$ odpada

$v_2 = \dfrac{2tp_0 + p_1}{a} = \dfrac{2 \cdot 9 \cdot 3 + 1}{5} = 11$

$86 \cdot 11^2 = 102^2 + 2 \longrightarrow$ RGIV $\longrightarrow t = 102 \quad v_1 = 102$

$y = v_1 \cdot v_2 = 102 \cdot 11 = 1122$

$1 + 86 \cdot 1122^2 = 10405^2$

$D = 149 \qquad 149 = 12^2 + 5 \longrightarrow t = 12 \quad a = 5$ znak "+" grupa "±4,−1"

$149 = 7^2 + 4\cdot 5^2$

$-4\cdot 5^2 + 149\cdot 1^2 = 7^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

(1) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 2\cdot 12\cdot 1p_0 + (4\cdot 5 - 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 24p_0 + 19 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 14$

(6) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 2\cdot 12\cdot 1p_0 - (4\cdot 5 + 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_0^2 - 24p_0 - 21 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{996}$

$p_0 = \frac{24+14}{10} = \frac{38}{10}$ odpada $\qquad p_0 = \frac{24-14}{10} = 1$

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 12\cdot 1 + 1}{5} = 5$

$149\cdot 5^2 = 61^2 + 4 \longrightarrow$ RGVIII $\longrightarrow t = 61 \quad t_1 = 30$

$v_1 = 4(2\cdot 30+1)(30^2 + 30 + 1)(2\cdot 30^2 + 2\cdot 30 + 1) = 422752204$

$y = v_1\cdot v_2 = 422752204\cdot 5 = 2113761020$

$1 + 149\cdot 2113761020^2 = 25801741449^2$

$D = 185 \qquad 185 = 14^2 - 11 \longrightarrow t = 14 \quad a = 11$ znak "−" grupa "−1"

$185 = 11^2 + 8^2 = 13^2 + 4^2$

To D może być przedstawione w postaci sumy kwadratów na dwa sposoby, z których wybieramy ten który spełnia warunki rozwiązań specjalnych, a na przyszłość należy pamiętać, żeby liczby z tej grupy sprawdzać czy przypadkiem nie mają większej ilości rozkładów.

$185 = 11^2 + 8^2$

$-11^2 + 185\cdot 1^2 = 8^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

(9) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 2\cdot 14\cdot 1p_0 - (11 - 1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 28p_0 - 10 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{1224}$ odpada

(10) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 2\cdot 14\cdot 1p_0 + (11 + 1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 28p_0 + 12 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 16$

$p_0 = \frac{28+16}{22} = 2 \qquad p_0 = \frac{28-16}{22} = \frac{12}{22}$ odpada

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 14\cdot 2 - 1}{11} = 5$

$185\cdot 5^2 = 68^2 + 1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow t = 68 \quad 2t = 136 \quad v_1 = 136$

$y = v_1\cdot v_2 = 136\cdot 5 = 680$

$1 + 185\cdot 680^2 = 9249^2$

$D = 199 \qquad 199 = 14^2 + 3 \qquad t = 14 \quad a = 3$ znak "+" grupa "+2"

$199 = 19^2 - 2\cdot 9^2 = 19^2 - 2\cdot 3^4$

$2\cdot 3^4 + 199\cdot 1^2 = 19^2 \longrightarrow p_3 = 1 \quad n = 2$

W tym rozkładzie liczby D trafiło się a w potędze 4-tej.

(2) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (2a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 3p_2^2 - 2\cdot 14\cdot 1p_2 + (2\cdot 3^3 - 1^2) = 0 \longrightarrow 3p_2^2 - 28p_2 + 53 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{148}$

(5) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (2a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 3p_2^2 - 2\cdot 14\cdot 1p_2 - (2\cdot 3^3 + 1^2) = 0 \longrightarrow 3p_2^2 - 28p_2 - 55 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 38$

$p_2 = \frac{28+38}{6} = 11 \qquad p_2 = \frac{28-38}{6} = \frac{-10}{6}$ odpada

$p_1 = \frac{2tp_2 + p_3}{a} = \frac{2\cdot 14\cdot 11 + 1}{3} = 103$

$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} = \frac{2\cdot 14\cdot 103 + 11}{3} = 965$

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 14\cdot 965 + 103}{3} = 9041$

$199\cdot 9041^2 = 127539^2 - 2 \longrightarrow$ RGIII $\longrightarrow t = 127539 \quad v_1 = 127539$

$y = v_1 \cdot v_2 = 127539 \cdot 9041 = 1153080099$

$1 + 199 \cdot 1153080099^2 = 16266196520^2$

D = 297 $\quad 297 = 17^2 + 8 \longrightarrow t = 17 \quad a = 8$ znak "+" grupa "+1"

$297 = 297 \cdot 1 = 99 \cdot 3 = 33 \cdot 9 = 27 \cdot 11$

$297 = 149^2 - 148^2 = 51^2 - 48^2 = 21^2 - 12^2 = 19^2 - 8^2$

liczbę 297 możemy przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb nieparzystych na 4-ry sposoby i każdemu z nich odpowiada różnica kwadratów. Jedna z tych różnic kwadratów spełnia wymagania.

$297 = 19^2 - 8^2$

$8^2 + 297 \cdot 1^2 = 19^2 / 8^2$ przekształcamy p_1 w liczbę parzystą (patrz D=73)

$8^4 + 297 \cdot 8^2 = 152^2 \longrightarrow p_3 = 8 \quad n = 2$

(3) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 2 \cdot 17 \cdot 8p_2 + (8^3 - 8^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 272p_2 + 448 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{59648}$

(4) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 2 \cdot 17 \cdot 8p_2 - (8^3 + 8^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 272p_2 - 576 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 304$

$p_2 = \frac{272 + 304}{16} = 36 \qquad p_2 = \frac{272 - 304}{16} = \frac{-32}{16} = -2$

sprawdzamy obie odpowiedzi

$p_1 = \frac{2tp_2 + p_3}{a} = \frac{2 \cdot 17 \cdot 36 + 8}{8} = 154 \qquad p_1 = \frac{2tp_2 + p_3}{a} = \frac{2 \cdot 17(-2) + 8}{8} = \frac{-60}{8}$ odpada

$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} = \frac{2 \cdot 17 \cdot 154 + 36}{8} = 659$

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2 \cdot 17 \cdot 659 + 154}{8} = 2820$

$297 \cdot 2820^2 = 48599^2 - 1 \longrightarrow$ RGI $\longrightarrow t = 48599, \quad v_1 = 1$

$y = v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot 2820 = 2820$

$1 + 297 \cdot 2820^2 = 48599^2$

Od $p_1 = 1$ w równaniu uproszczonym przeszliśmy do poprawnej wartości $p_1 = 154$.

D = 520 $\quad 520 = 23^2 - 9 \longrightarrow t = 23 \quad a = 9$ znak "−" grupa "−4"

$520 = 4(9^2 + 7^2)$

$-4 \cdot 9^2 + 520 \cdot 1^2 = 14^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

(7) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 2 \cdot 23 \cdot 1\, p_0 - (4 \cdot 9 - 1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 46p_0 - 35 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{3376}$

(12) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 2 \cdot 23 \cdot 1\, p_0 + (4 \cdot 9 + 1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 46p_0 + 37 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 28$

$p_0 = \frac{46 + 28}{18} = \frac{74}{18}$ odpada $\qquad p_0 = \frac{46 - 28}{18} = 1$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2 \cdot 23 \cdot 1 - 1}{9} = 5$

$520 \cdot 5^2 = 114^2 + 4 \longrightarrow$ RGVI $\longrightarrow t = 114, \quad t_1 = 57, \quad v_1 = 57$

$y = v_1 \cdot v_2 = 57 \cdot 5 = 285$

$1 + 520 \cdot 285^2 = 6499^2$

PS2

— jeżeli to możliwe dzielimy D przez 4-ry i postępujemy z nowym D jak w PS1. Znajdujemy rozwiązanie dla nowego D (jeżeli to możliwe) i wracamy do właściwego D przy pomocy $\triangle$-ty, jeżeli y jest liczba nieparzystą lub wyłączamy 2^2 z y^2, jeżeli y jest liczba parzystą.

$D = 268$ $\quad 268 = 16^2 + 12 \longrightarrow t = 16 \quad a = 12$ znak "+" grupa "+4"

$268 = 4 \cdot 67 = 4(7^2 + 2 \cdot 3^2)$

$67 = 8^2 + 3 = 7^2 + 2 \cdot 3^2 \longrightarrow t = 8 \quad a = 3$ znak "+" grupa "−2"

$-2 \cdot 3^2 + 67 \cdot 1^2 = 7^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

2 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 2 \cdot 8 \cdot 1\, p_0 + (2 \cdot 3 - 1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 16\, p_0 + 5 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 14$

5 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 2 \cdot 8 \cdot 1\, p_0 - (2 \cdot 3 + 1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 16\, p_0 - 7 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{340}$

$p_0 = \frac{16 + 14}{6} = 5$ $\qquad p_0 = \frac{16 - 14}{6} = \frac{2}{6}$ odpada

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 5 + 1}{3} = 27$

$67 \cdot 27^2 = 221^2 + 2 \longrightarrow$ RGIV $\longrightarrow t = 221 \qquad v_1 = 221$

$y = v_1 \cdot v_2 = 221 \cdot 27 = 5967$

$1 + 67 \cdot 5967^2 = 48842^2$ przekształcamy przy pomocy $\triangle$-ty

$1 + 67 \cdot 4 \cdot 5967^2 \cdot 48842^2 = 4771081927^2$

$1 + 268 \cdot 291440214^2 = 4771081927^2$

$D = 304$ $\quad 304 = 17^2 + 15 \longrightarrow t = 17 \quad a = 15$ znak "+" grupa "+4"

$304 = 4 \cdot 76 = 4 \cdot 4 \cdot 19 = 77^2 - 75^2$

To trochę odbiegający od założeń przypadek. Spróbujemy znaleźć rozwiązanie dla D = 19 i wrócić do D = 304.

$19 = 4^2 + 3 = 2 \cdot 3^2 + 1^2 \longrightarrow t = 4 \quad a = 3$ znak "+" grupa "−2"

$-2 \cdot 3^2 + 19 \cdot 1^2 = 1^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

2 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1\, p_0 + (2 \cdot 3 - 1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 8\, p_0 + 5 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 2$

5 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1\, p_0 - (2 \cdot 3 + 1^2) = 0 \longrightarrow 3p_0^2 - 8\, p_0 - 7 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{148}$

$p_0 = \frac{8 + 2}{6} = \frac{10}{6}$ odpada $\qquad p_0 = \frac{8 - 2}{6} = 1$

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 1 + 1}{3} = 3$

$19 \cdot 3^2 = 13^2 + 2 \longrightarrow$ RGIV $\longrightarrow t = 13 \qquad v_1 = 13$

$y = v_1 \cdot v_2 = 13 \cdot 3 = 39$

$1 + 19 \cdot 39^2 = 170^2$ przekształcamy przy pomocy $\triangle$-ty

$1 + 19 \cdot 4 \cdot 39^2 \cdot 170^2 = 57799^2$

$1 + 304 \cdot 3315^2 = 57799^2$

$D = 428$ $\quad 428 = 21^2 - 13 \longrightarrow t = 21 \quad a = 13$ znak "−" grupa "+4"

$428 = 4 \cdot 107 = 4(54^2 - 53^2)$

$107 = 10^2 + 7 = 2 \cdot 7^2 + 3^2 \longrightarrow t = 10 \quad a = 7$ znak "+" grupa "−2"

$-2 \cdot 7^2 + 107 \cdot 1^2 = 3^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

2 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 7p_0^2 - 2 \cdot 10 \cdot 1\, p_0 + (2 \cdot 7 - 1^2) = 0 \longrightarrow 7p_0^2 - 20\, p_0 + 13 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 6$

5 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 7p_0^2 - 2 \cdot 10 \cdot 1\, p_0 - (2 \cdot 7 + 1^2) = 0 \longrightarrow 7p_0^2 - 20\, p_0 - 15 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{820}$

$p_0 = \frac{20 + 6}{14} = \frac{26}{14}$ odpada $\qquad p_0 = \frac{20 - 6}{14} = 1$

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 10\cdot 1 + 1}{7} = 3$

$107\cdot 3^2 = 31^2 + 2 \longrightarrow$ RGIV $\longrightarrow t = 31 \qquad v_1 = 31$

$y = v_1 \cdot v_2 = 31\cdot 3 = 93$

$1 + 107\cdot 93^2 = 962^2$ przekształcamy przy pomocy $\triangle$–ty

$1 + 107\cdot 4\cdot 93^2\cdot 962^2 = 1850887^2$

$1 + 428\cdot 89466^2 = 1850887^2$

D = 452 $\qquad 452 = 21^2 + 11 \longrightarrow t = 21 \quad a = 11$ znak "+" grupa "–4"

$452 = 4\cdot 113 = 4(7^2 + 8^2)$

$113 = 11^2 - 8 = 7^2 + 8^2 \longrightarrow t = 11 \quad a = 8$ znak "–" grupa "–1"

$-8^2 + 113\cdot 1^2 = 7^2/\,8^2$ przekształcamy p_1 w liczbę parzystą (patrz D=73)

$-8^4 + 113\cdot 8^2 = 56^2 \longrightarrow p_3 = 8 \quad n = 2$

(9) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 2\cdot 11\cdot 8p_2 - (8^3 - 8^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 176p_2 - 448 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{45312}$

(10) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 2\cdot 11\cdot 8p_2 + (8^3 + 8^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 176p_2 + 576 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 112$

$p_2 = \frac{176 + 112}{16} = 18 \qquad\qquad p_2 = \frac{176 - 112}{16} = 4$

$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 11\cdot 18 - 8}{8} = 48.5$ odpada $\qquad p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 11\cdot 4 - 8}{8} = 10$

$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 11\cdot 10 - 4}{8} = 27$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 11\cdot 27 - 10}{8} = 73$

$113\cdot 73^2 = 776^2 + 1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow t = 776 \qquad 2t = 1552 \qquad v_1 = 1552$

$y = v_1\cdot v_2 = 1552\cdot 73 = 113296$

$1 + 113\cdot 113296^2 = 1204353^2$ wyłączamy 2^2 z 113296^2

$1 + 452\cdot 56648^2 = 1204353^2$

D = 520 rozwiązaliśmy już w PS1, teraz zostanie przedstawiony inny sposób rozwiązania tego D.

$520 = 23^2 - 9 \longrightarrow t = 23 \quad a = 9$ znak "–" grupa "–4"

$520 = 4\cdot 130$

$130 = 11^2 + 9 = 9^2 + 7^2 \longrightarrow t = 11 \quad a = 9$ znak "+" grupa "–1"

$-9^2 + 130\cdot 1^2 = 7^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

(3) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 2\cdot 11\cdot 1\,p_0 + (9 - 1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 22\,p_0 + 8 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 14$

(4) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 2\cdot 11\cdot 1\,p_0 - (9 + 1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 22\,p_0 - 10 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{844}$

$p_0 = \frac{22 + 14}{18} = 2 \qquad\qquad p_0 = \frac{22 - 14}{18} = \frac{8}{18}$ odpada

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 11\cdot 2 + 1}{9} = 5$

$130\cdot 5^2 = 57^2 + 1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow t = 57, \quad 2t = 114, \quad v_1 = 114$

$y = v_1\cdot v_2 = 114\cdot 5 = 570$

$1 + 130\cdot 570^2 = 2049^2$

$1 + 520\cdot 285^2 = 2049^2$

D = 1480 $\qquad 1480 = 38^2 + 36 \longrightarrow t = 38 \quad a = 36$ znak "+" grupa "–4"

$1480 = 4\cdot 370 = 4(11^2 + 4^2)$

$370 = 19^2 + 9 = 17^2 + 9^2 \longrightarrow t = 19 \quad a = 9$ znak "+" grupa "–1"

$-9^2 + 370 \cdot 1^2 = 17^2 \longrightarrow p_1 = 1 \quad n = 0$

③ $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 2 \cdot 19 \cdot 1\, p_0 + (9 - 1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 38\, p_0 + 8 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 34$

④ $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 2 \cdot 19 \cdot 1\, p_0 - (9 + 1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 38\, p_0 - 10 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{1804}$

$p_0 = \dfrac{38 + 34}{18} = 4$ $\qquad p_0 = \dfrac{38 - 34}{18} = \dfrac{4}{18}$ odpada

$v_2 = \dfrac{2tp_0 + p_1}{a} = \dfrac{2 \cdot 19 \cdot 4 + 1}{9} = 17$

$370 \cdot 17^2 = 327^2 + 1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow \quad t = 327 \qquad 2t = 654 \qquad v_1 = 654$

$y = v_1 \cdot v_2 = 654 \cdot 17 = 11118$

$1 + 370 \cdot 11118^2 = 213859^2$

$1 + 1480 \cdot 5559^2 = 213859^2$

— sprawdzamy czy jeden ze składników rozkładu można uzupełnić do potęgi liczby α i odpowiedniej grupy.

$D = 157$ $\qquad 157 = 13^2 - 12 \longrightarrow t = 13 \quad \alpha = 12 = 4\cdot3$ znak "−" grupa "±4,−1"

$157 = 11^2 + 4\cdot3^2$ $\qquad$ jednym ze składników rozkładu jest podzielnik α.

$-4\cdot3^2 + 157\cdot1^2 = 11^2 / 4^2$ $\qquad$ uzupełniamy wyraz "$-4\cdot3^2$" do pełnego α^2

$-4\cdot12^2 + 157\cdot4^2 = 44^2 \longrightarrow p_1 = 4 \quad n = 0$

To kolejny przypadek kiedy od równania uproszczonego przechodzimy do poprawnego równania.

(7) $\alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 - (4\alpha^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 12p_0^2 - 2\cdot13\cdot4p_0 - (4\cdot12 - 4^2) = 0 \longrightarrow 12p_0^2 - 104p_0 - 32 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{12352}$

(12) $\alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 + (4\alpha^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 12p_0^2 - 2\cdot13\cdot4p_0 + (4\cdot12 + 4^2) = 0 \longrightarrow 12p_0^2 - 104p_0 + 64 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 88$

$p_0 = \frac{104+88}{24} = 8$ $\qquad p_0 = \frac{104-88}{24} = \frac{16}{24}$ odpada

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{\alpha} = \frac{2\cdot13\cdot8-4}{12} = 17$

$157\cdot17^2 = 213^2 + 4 \longrightarrow$ RGVIII $\longrightarrow t = 213, \quad t_1 = 106$

$v_1 = 4(2\cdot106+1)(106^2+106+1)(2\cdot106^2+2\cdot106+1) = 219233193660$

$y = v_1\cdot v_2 = 219233193660\cdot17 = 3726964292220$

$1 + 157\cdot3726964292220^2 = 46698728731849^2$

$D = 277$ $\qquad 277 = 17^2 - 12 \longrightarrow t = 17 \quad \alpha = 12$ znak "−" grupa "±4,−1"

$277 = 9^2 + 4\cdot7^2$

$-9^2 + 277\cdot1^2 = 14^2$

$-3^4 + 277\cdot1^2 = 14^2/4^4$ $\qquad$ uzupełniamy składnik "-3^4" do pełnego α^4

$-12^4 + 277\cdot16^2 = 224^2/4$ $\qquad$ mnożymy przez 4−ry ze względu na grupę

$-4\cdot12^4 + 277\cdot32^2 = 448^2 \longrightarrow p_3 = 32 \quad n = 2$

(7) $\alpha p_2^2 - 2tp_3p_2 - (4\alpha^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 12p_2^2 - 2\cdot17\cdot32p_2 - (4\cdot12^3 - 32^2) = 0 \longrightarrow 12p_2^2 - 1088p_2 - 5888 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{1466368}$

(12) $\alpha p_2^2 - 2tp_3p_2 + (4\alpha^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 12p_2^2 - 2\cdot17\cdot32p_2 + (4\cdot12^3 + 32^2) = 0 \longrightarrow 12p_2^2 - 1088p_2 + 7936 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 896$

$p_2 = \frac{1088+896}{24} = \frac{1984}{24}$ $\qquad p_2 = \frac{1088-896}{24} = 8$

$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{\alpha} = \frac{2\cdot17\cdot8-32}{12} = 20$

$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{\alpha} = \frac{2\cdot17\cdot20-8}{12} = 56$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{\alpha} = \frac{2\cdot17\cdot56-20}{12} = 157$

$277\cdot157^2 = 2613^2 + 4 \longrightarrow$ RGVIII $\longrightarrow t = 2613, \quad t_1 = 1306$

$v_1 = 4(2\cdot1306+1)(1306^2+1306+1)(2\cdot1306^2+2\cdot1306+1) = 609070138463568600$

$y = v_1\cdot v_2 = 609070138463568600\cdot157 = 95624011738780270200$

$1 + 277\cdot95624011738780270200^2 = 1591500737989804758490^2$

Mogłoby się wydawać, że możemy poprzestać na poniższym równaniu, bo 277 to też grupa "−1" z grupy "±4−1". Sprawdzimy ten przypadek.

$-12^4 + 277\cdot16^2 = 224^2 \longrightarrow p_3 = 16 \quad n = 2$

(9) $\alpha p_2^2 - 2tp_3p_2 - (\alpha^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 12p_2^2 - 2\cdot17\cdot16p_2 - (12^3 - 16^2) = 0 \longrightarrow 12p_2^2 - 544p_2 - 1472 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{366592}$

(10) $\alpha p_2^2 - 2tp_3p_2 + (\alpha^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 12p_2^2 - 2\cdot17\cdot16p_2 + (12^3 + 16^2) = 0 \longrightarrow 12p_2^2 - 544p_2 + 1984 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 448$

$p_2 = \frac{544+448}{24} = \frac{992}{24}$ odpada

$p_2 = \frac{544-448}{24} = 4$

$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 4 - 16}{12} = 10$

$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 10 - 4}{12} = 28$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 28 - 10}{12} = 78.5$

Jak widać $v_2 = 78.5$ nie prowadzi do rozwiązania. Znowu trafiliśmy na przypadek rownania uproszczonego, choć w nieco inny sposób. Omówimy dokładnie ten przypadek.

Zanim do tego przystąpimy przypatrzmy się wartościom v_2 dla liczb z grupy "±4−1".

D z grupy "±4−1"	13	29	53	61	85	109	125	149	157	181
dla "−4" mamy v_2	1	1	1	5	1	25	1	5	17	97
dla "+4" mamy v_2	3	5	7	195	9	6525	11	305	3631	126585
dla "−1" mamy v_2	5	13	25	3805	41	851525	61	9305	385645	82596761

Tak na marginesie, widać jak łatwo znajdować v_2 dla $D = (2t_1+1)^2+4$. Dla wszystkich D z grupy "±4−1" widoczna jest zależność wielkości v_2 od przynależności do "−4", "+4" czy "−1". To samo dotyczy odpowiednich wartości p_n. W omawianym przykładzie dla D = 277 można zauważyć, ze w równaniach

$$-12^4 + 277\cdot 16^2 = 224^2/4$$

$$-4\cdot 12^4 + 277\cdot 32^2 = 448^2$$

wartości p_n nie spełniają tego warunku. Poprawne pod względem wartości p_n może być tylko jedno z nich, co należy sprawdzić.

W tym przypadku dla D = 277 i "−1" z grupy "±4−1" mamy:

$$-1 + 277\cdot 535979945^2 = 8920484118^2$$

....

....

$-12^4 + 277\cdot 8675176^2 = 144383704^2$ $\quad p_3 = 8675176$ a nie 16

Pominęliśmy obliczenia prowadzące do powyższego wyniku. Znaleźliśmy v_2 i y dla D = 277, czyli v_2 dla "−4" z grupy "±4−1" (bo v_2 najmniejsze). Znalezienie v_2 dla "+4" czy "−1" z grupy "±4−1", a następnie odpowiednich p_n to trochę prostych rachunków (to podzielniki y).

Dla grup "±4−1", "+4", "−4" dosyć często zdarza się, ze znajdujemy rozkład D dla tych grup bez "+4" czy "−4" przed a (jak w omawianym przykładzie $-12^4 + 277\cdot 16^2 = 224^2$). I próbując rozwiązać takie RP otrzymujemy v_2 lub p_n które nie jest liczbą całkowitą. Można powiedzieć, że "parzystość" p_n wziętego do obliczeń jest zbyt mała i tak jak dla D = 277 wystarczy pomnożyć obie strony przez 4, żeby tą parzystość zwiększyć, a możemy to zrobić dla D z grup jak wyżej. Problem "parzystości" dotyczy jednak wszystkich grup co pokażemy na paru przykładach.

D = 521 $\quad 521 = 23^2 - 8 \longrightarrow t = 23 \quad a = 8$ znak "−" grupa "−1"

$521 - 8^3 = 3^2$

$-8^3 + 521\cdot 1^2 = 3^2 \longrightarrow p_2 = 1 \qquad n = 1$

(9) $ap_2^2 - 2tp_2p_1 - (a^2 - p_2^2) = 0 \longrightarrow 8p_1^2 - 2\cdot 23\cdot 1p_1 - (8^2 - 1^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 46p_2 - 63 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{4132}$

(10) $ap_2^2 - 2tp_2p_1 + (a^2 + p_2^2) = 0 \longrightarrow 8p_1^2 - 2\cdot 23\cdot 1p_1 + (8^2 + 1^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 46p_2 + 65 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 6$

$p_1 = \frac{46+6}{16} = 3.25 \qquad p_1 = \frac{46-6}{16} = 2.5$

Widoczne jest, że równanie z którego korzystaliśmy to równanie uproszczone.

$-8^3 + 521\cdot 1^2 = 3^2/8^2$ sprawdzamy co stanie się po takiej poprawce równania

$-8^5 + 521\cdot 8^2 = 24^2 \longrightarrow p_4 = 8 \qquad n = 3$

(9) $ap_3^2 - 2tp_4p_3 - (a^2 - p_4^2) = 0 \longrightarrow 8p_3^2 - 2\cdot 23\cdot 8p_3 - (8^4 - 8^2) = 0 \longrightarrow 8p_3^2 - 368p_3 - 4032 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{264448}$

(10) $ap_3^2 - 2tp_4p_3 + (a^2 + p_4^2) = 0 \longrightarrow 8p_3^2 - 2\cdot 23\cdot 8p_3 + (8^4 + 8^2) = 0 \longrightarrow 8p_3^2 - 368p_3 + 4160 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 48$

$$p_3 = \frac{368+48}{16} = 26 \qquad p_3 = \frac{368-48}{16} = 20$$

$$p_2 = \frac{2tp_3 - p_4}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 26 - 8}{8} = 146.5 \qquad p_2 = \frac{2tp_3 - p_4}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 20 - 8}{8} = 114$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 114 - 20}{8} = 653$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 653 - 114}{8} = 3740.5$$

jeszcze raz zwiększamy "parzystość" mnożąc obie strony przez 8^2

$-8^5 + 521\cdot 8^2 = 24^2 / 8^2$

$-8^7 + 521\cdot 64^2 = 192^2 \longrightarrow p_6 = 64 \quad n = 5$

(9) $ap_5^2 - 2tp_6p_5 - (a^2 - p_6^2) = 0 \longrightarrow 8p_5^2 - 2\cdot 23\cdot 64p_5 - (8^6 - 64^2) = 0 \longrightarrow 8p_3^2 - 2944p_3 - 258048 = 0 \ \sqrt{\triangle} = \sqrt{16924672}$

(10) $ap_5^2 - 2tp_6p_5 + (a^2 + p_6^2) = 0 \longrightarrow 8p_5^2 - 2\cdot 23\cdot 64p_5 + (8^6 + 64^2) = 0 \longrightarrow 8p_3^2 - 2944p_3 + 266240 = 0 \ \sqrt{\triangle} = 384$

$$p_5 = \frac{2944+384}{16} = 208 \qquad p_5 = \frac{2944-384}{16} = 160$$

$$p_4 = \frac{2tp_5 - p_6}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 208 - 64}{8} = 1188 \qquad p_4 = \frac{2tp_5 - p_6}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 160 - 64}{8} = 912$$

$$p_3 = \frac{2tp_4 - p_5}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 1188 - 208}{8} = 6805 \qquad p_3 = \frac{2tp_4 - p_5}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 912 - 160}{8} = 5224$$

$$p_2 = \frac{2tp_3 - p_4}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 6805 - 1188}{8} = 38980.25 \qquad p_2 = \frac{2tp_3 - p_4}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 5224 - 912}{8} = 29924$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 29924 - 5224}{8} = 171410$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 171410 - 29924}{8} = 981867$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 981867 - 171410}{8} = 5624309$$

$521\cdot 5624309^2 = 128377240^2 + 1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow t = 128377240 \quad v_1 = 2t = 256754480$

$y = v_1\cdot v_2 = 256754480\cdot 5624309 = 1444066532654320$

$1 + 521\cdot 1444066532654320^2 = 32961431500035201^2$

Przy kolejnych próbach otrzymywaliśmy p_n, które nie było liczbą całkowitą, ale końcowka to było 0.5. Taki wynik sugeruje, że zwiększenie "parzystości" pozwoli uzyskać poprawny wynik.

D = 281 $\qquad 281 = 17^2 - 8 \longrightarrow t = 17 \quad a = 8$ znak "–" grupa "–1"

$281 - 16^2 = 5^2$

$-16^2 + 281\cdot 1^2 = 5^2/4^2 \qquad \frac{8^3}{16^2} = 2$ odpada $\qquad \frac{8^4}{16^2} = 4^2$

Pomnożyliśmy obie strony równania przez 4^2 z dwóch powodów. Po pierwsze p_1 powinno być parzyste, po drugie 16^2 należy zamienić w najbliższą potęgę liczby 8.

$-8^4 + 281\cdot 4^2 = 20^2 \longrightarrow p_3 = 4 \quad n = 2$

(9) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 2\cdot 17\cdot 4\ p_2 - (8^3 - 4^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 136p_2 - 496 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{34368}$

(10) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 2\cdot 17\cdot 4\ p_2 + (8^3 + 4^2) = 0 \longrightarrow 8p_2^2 - 136p_2 + 528 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 40$

$$p_2 = \frac{136+40}{16} = 11 \qquad p_2 = \frac{136-40}{16} = 6$$

$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 17 \cdot 11 - 4}{8} = 46.25$

$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 17 \cdot 6 - 4}{8} = 25$

$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 17 \cdot 25 - 6}{8} = 105.5$

Widoczne jest, że równanie z którego korzystaliśmy to równanie uproszczone.

$-8^4 + 281\cdot 4^2 = 20^2/8^2$

$-8^6 + 281\cdot 32^2 = 160^2 \longrightarrow p_5 = 32 \quad n = 4$

(9) $ap_4^2 - 2tp_5p_4 - (a^5 - p_5^2) = 0 \longrightarrow 8p_4^2 - 2\cdot 17\cdot 32p_4 - (8^5 - 32^2) = 0 \longrightarrow 8p_4^2 - 1088p_4 - 31744 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{2199552}$

(10) $ap_4^2 - 2tp_5p_4 + (a^5 + p_5^2) = 0 \longrightarrow 8p_4^2 - 2\cdot 17\cdot 32p_4 + (8^5 + 32^2) = 0 \longrightarrow 8p_4^2 - 1088p_4 + 33792 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 320$

$p_4 = \frac{1088 + 320}{16} = 88$

$p_3 = \frac{2tp_4 - p_5}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 88 - 32}{8} = 370$

$p_2 = \frac{2tp_3 - p_4}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 370 - 88}{8} = 1561.5$

$p_4 = \frac{1088 - 320}{16} = 48$

$p_3 = \frac{2tp_4 - p_5}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 48 - 32}{8} = 200$

$p_2 = \frac{2tp_3 - p_4}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 200 - 48}{8} = 844$

$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 844 - 200}{8} = 3562$

$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 3562 - 844}{8} = 15033$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 15033 - 3562}{8} = 63445$

$281\cdot 63445^2 = 1063532^2 + 1 \longrightarrow \mathrm{RGII} \longrightarrow t = 1063532 \quad v_1 = 2t = 2127064$

$y = v_1\cdot v_2 = 2127064 \cdot 63445 = 134951575480$

$1 + 281 \cdot 134951575480^2 = 2262200630049^2$

Dla każdego D należącego do grupy "+1" i jakiejś innej grupy możemy wypisać szereg wartości p_n zaczynając od y lub v_2 i jak można sprawdzić w rozdziale "O wartościach p_n" dla szeregów zaczynających się od v_2 zawsze są to wartości znacznie mniejsze. Z drugiej strony kiedy poszukujemy odpowiedniego równania ORP zaczynamy "od dołu" tzn. najpierw rozkład danego D ($p_n = 1$), potem możemy próbować $p_n = 2,3,4,5...$ lub przekształcenia przy pomocy $\triangle$–ty. Tak postępując w pierwszej kolejności znajdziemy p_n pochodzące z szeregów zaczynających się od v_2, a jeszcze częściej równanie uproszczone z tego samego szeregu. Jak na przykład $-12^4 + 277\cdot 16^2 = 224^2$.

D = 509 $\qquad 509 = 23^2 - 20 \longrightarrow t = 23 \quad a = 20$ znak "–" grupa ±4,–1"

$509 = 5^2 + 4\cdot 11^2$

$-5^2 + 509\cdot 1^2 = 22^2/4^2$ $\qquad$ uzupełniamy składnik "-5^2" do pełnego a^2

$-20^2 + 509\cdot 4^2 = 88^2/4$

$-4\cdot 20^2 + 509\cdot 8^2 = 176^2 \longrightarrow p_1 = 8 \quad n = 0$

(7) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 20p_0^2 - 2\cdot 23\cdot 8\,p_0 - (4\cdot 20 - 8^2) = 0 \longrightarrow 20p_0^2 - 368p_0 - 16 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{136704}$

(12) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 20p_0^2 - 2\cdot 23\cdot 8\,p_0 + (4\cdot 20 + 8^2) = 0 \longrightarrow 20p_0^2 - 368p_0 + 144 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 352$

$p_0 = \frac{368 + 352}{40} = 18 \qquad p_0 = \frac{368 - 352}{40} = \frac{74}{18}$ odpada

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 18 - 8}{20} = 41$

$509\cdot 41^2 = 925^2 + 4 \longrightarrow \mathrm{RGVIII} \longrightarrow t = 925 \quad t_1 = 462$

$v_1 = 4(2\cdot 462 + 1)(462^2 + 462 + 1)(2\cdot 462^2 + 2\cdot 462 + 1) = 338595122946700$

$y = v_1\cdot v_2 = 338595122946700 \cdot 41 = 13882400040814700$

$1 + 509\cdot 13882400040814700^2 = 313201220822405001^2$

$D = 109 \qquad 109 = 10^2 + 9 \longrightarrow t = 10 \quad a = 9$ znak "+" grupa "±4,−1"

$109 = 3^2 + 4\cdot5^2$

$-3^2 + 109\cdot1^2 = 10^2 / 4$

$-4\cdot3^2 + 109\cdot2^2 = 20^2 / 3^2$

$-4\cdot9^2 + 109\cdot6^2 = 60^2 \longrightarrow p_1 = 6 \quad n = 0.$

1 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 2\cdot10\cdot6\,p_0 + (4\cdot9 - 6^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 120p_0 + 0 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 120$

6 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 2\cdot10\cdot6\,p_0 - (4\cdot9 + 6^2) = 0 \longrightarrow 9p_0^2 - 120p_0 - 72 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{16992}$

$p_0 = \frac{120+120}{18} = \frac{240}{18}$ odpada $\qquad p_0 = \frac{120-120}{18} = 0$

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot10\cdot0+6}{9} = \frac{6}{9}$

Błędem było mnożenie obu stron równania przez 3^2, bo 3^2 to w tym przypadku a^1, czyli wykonaliśmy przekształcenie jak niżej:

$-a + D\cdot1^2 = t^2 / \cdot a$

Takie przekształcenie nie wnosi nic nowego i nie prowadzi do rozwiązania.

Podobnie np. jeżeli $a = 25$, a $D = c_1^2 + 4\cdot5^2$, to nie można mnożyć obu stron równania przez 5^2, bo to a^1, a nie a^2.

W rozdziale "O wartościach p_n" (strona 58) radziliśmy przedstawiać D na dwa sposoby.

$D = 109 \qquad 109 = 10^2 + 9 = 11^2 - 12 \longrightarrow t = 11 \quad a = 12$ znak "−" grupa ±4,−1"

$-3^2 + 109\cdot1^2 = 10^2 / 4^2$ uzupełniamy składnik " 3^2 " do pełnego a^2

$-12^2 + 109\cdot4^2 = 40^2 / 4$

$-4\cdot12^2 + 109\cdot8^2 = 80^2 \longrightarrow p_1 = 8 \quad n = 0$

7 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 12p_0^2 - 2\cdot11\cdot8\,p_0 - (4\cdot12 - 8^2) = 0 \longrightarrow 12p_0^2 - 176p_0 + 16 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{30208}$

12 $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 12p_0^2 - 2\cdot11\cdot8\,p_0 + (4\cdot12 + 8^2) = 0 \longrightarrow 12p_0^2 - 176p_0 + 112 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 160$

$p_0 = \frac{176+160}{24} = 14 \qquad p_0 = \frac{176-160}{24} = \frac{16}{24}$ odpada

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot11\cdot14-8}{12} = 25$

$109\cdot25^2 = 261^2 + 4 \longrightarrow$ RGVIII $\longrightarrow t = 261, \quad t_1 = 130$

$v_1 = 4(2\cdot130+1)(130^2+130+1)(2\cdot130^2+2\cdot130+1) = 605616978204$

$y = v_1\cdot v_2 = 605616978204\cdot25 = 15140424455100$

$1 + 109\cdot15140424455100^2 = 158070671986249^2$

$D = 1285 \qquad 1285 = 36^2 - 11 = 35^2 + 60 \qquad 1285 = 31^2 + 4\cdot9^2 = 33^2 + 4\cdot7^2$

$1285 = 31^2 + 4\cdot9^2$ wybieramy $1285 = 35^2 + 60 \longrightarrow t = 35 \quad a = 60$ znak "+" grupa ±4−1"

$-4\cdot3^4 + 1285\cdot1^2 = 31^2 / 4^4\cdot5^4$

$-4\cdot60^4 + 1285\cdot400^2 = 12400^2 \longrightarrow p_3 = 400 \qquad n = 2$

1 $ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (4a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 60p_2^2 - 2\cdot35\cdot400p_2 + (4\cdot60^3 - 400^2) = 0 \longrightarrow 60p_2^2 - 28000p_2 + 704000 = 0$

6 $ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (4a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 60p_2^2 - 2\cdot35\cdot400p_2 - (4\cdot60^3 + 400^2) = 0 \longrightarrow 60p_2^2 - 28000p_2 - 1024000 = 0$

1 $\sqrt{\triangle} = 24800$

6 $\sqrt{\triangle} = \sqrt{1029760000}$

$$p_2 = \frac{28000+24800}{120} = 440 \qquad p_2 = \frac{28000-24800}{120} = 20$$

$$p_1 = \frac{2tp_2+p_3}{a} = \frac{2\cdot 35\cdot 440+400}{60} = 520 \qquad p_1 = \frac{2tp_2+p_3}{a} = \frac{2\cdot 35\cdot 20+400}{60} = 30$$

$$p_0 = \frac{2tp_1+p_2}{a} = \frac{2\cdot 35\cdot 520+440}{60} = 614 \qquad p_0 = \frac{2tp_1+p_2}{a} = \frac{2\cdot 35\cdot 30+20}{60} = \frac{2120}{60}$$

$$v_2 = \frac{2tp_0+p_1}{a} = \frac{2\cdot 35\cdot 614+520}{60} = 725$$

$1285\cdot 725^2 = 25989^2+4 \longrightarrow$ RGVIII $\longrightarrow t = 25989,\quad t_1 = 12994$

$$v_1 = 4(2\cdot 12994+1)(12994^2+12994+1)(2\cdot 12994^2+2\cdot 12994+1) =$$
$$= 5928131824089574496796$$

$y = v_1\cdot v_2 = 5928131824089574496796\cdot 725 = 4297895572464941510177100$

$1+1285\cdot 4297895572464941510177100^2 = 154066218432467100261106249^2$

D = 610 $\qquad 610 = 25^2 - 15 = 24^2+34 \qquad 610 = 23^2+9^2$

$t = 25 \quad a = 15 \quad$ znak "−" $\quad$ grupa "−1"

$-9^2+610\cdot 1^2 = 23^2$

$-3^4+610\cdot 1^2 = 23^2/5^4$

$-15^4+610\cdot 25^2 = 575^2 \longrightarrow p_3 = 25 \quad n = 2$

(9) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (a^3-p_3^2) = 0 \longrightarrow 15p_2^2 - 2\cdot 25\cdot 25p_2 - (15^3-25^2) = 0 \longrightarrow 15p_2^2 - 1250p_2 - 2750 = 0$

(10) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (a^3+p_3^2) = 0 \longrightarrow 15p_2^2 - 2\cdot 25\cdot 25p_2 + (15^3+25^2) = 0 \longrightarrow 15p_2^2 - 1250p_2 + 4000 = 0$

(9) $\sqrt{\triangle} = \sqrt{1727500}$

(10) $\sqrt{\triangle} = 1150$

$$p_2 = \frac{1250+1150}{30} = 80 \qquad p_2 = \frac{1250-1150}{30} = \frac{100}{30} \text{ odpada}$$

$$p_1 = \frac{2tp_2-p_3}{a} = \frac{2\cdot 25\cdot 80-25}{15} = 265$$

$$p_0 = \frac{2tp_1-p_2}{a} = \frac{2\cdot 25\cdot 265-80}{15} = 878$$

$$v_2 = \frac{2tp_0-p_1}{a} = \frac{2\cdot 25\cdot 878-265}{15} = 2909$$

$610\cdot 2909^2 = 71847^2+1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow t = 71847 \qquad v_1 = 2\cdot 71847 = 143694$

$y = v_1\cdot v_2 = 143694\cdot 2909 = 418005846$

$1+610\cdot 418005846^2 = 10323982819^2$

Metoda uzupełniania do pełnego a nie zawsze jest skuteczna. Na przykład:

D = 421 $\qquad 421 = 21^2 - 20 \longrightarrow t = 21 \quad a = 20 \quad$ znak "−" grupa "±4−1"

$421 = 15^2+4\cdot 7^2 \qquad 421 = 20^2+21 \longrightarrow t = 20 \quad a = 21 \quad$ znak "+" grupa "±4−1"

$-4\cdot 7^2+421\cdot 1^2 = 15^2/3^2 \qquad$ uzupełniamy składnik "$-4\cdot 7^2$" do pełnego a^2

$-4\cdot 21^2+421\cdot 3^2 = 45^2 \longrightarrow p_1 = 3 \quad n = 0$

(1) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1-p_1^2) = 0 \longrightarrow 21p_0^2 - 2\cdot 20\cdot 3p_0 + (4\cdot 21-3^2) = 0 \longrightarrow 21p_0^2 - 120p_0 + 75 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = 90$

(6) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1+p_1^2) = 0 \longrightarrow 21p_0^2 - 2\cdot 20\cdot 3p_0 - (4\cdot 21+3^2) = 0 \longrightarrow 21p_0^2 - 120p_0 - 93 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = \sqrt{22212}$

$$p_0 = \frac{120+90}{42} = 5 \qquad p_0 = \frac{120-90}{42} = \frac{30}{42} \text{ odpada}$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{\alpha} = \frac{2\cdot 20\cdot 5 + 3}{21} = \frac{203}{21} \text{ odpada}$$

Metoda uzupełniania do pełnego α zawiodła. Nie możemy wypróbować metody z parzystym $\alpha = 20$ ($421 = 21^2 - 20$), ponieważ w rozkładzie nie występuje podzielnik 5. Co nie znaczy, że nie potrafimy rozwiązać RP dla D = 421 w inny sposób ($-5^5 + 421\cdot 9^2 = 176^2 / 4^6 \longrightarrow -4\cdot 20^5 + 421\cdot 576^2 = 11264^2$).

Można przytoczyć wiele przykładów kiedy metoda uzupełniania do pełnego α nie prowadzi do rozwiązania. Przyczyna jest prosta. W tych przypadkach kiedy udaje się nam otrzymać rozwiązanie liczba, która uzupełnia α pokrywa się z odpowiednim właściwym p_n. Zdarza się to dosyć często i dlatego warto próbować szukać rozwiązania tą metodą. W tej metodzie musi też zachodzić sprzyjający nam rozkład liczby D zawierający podzielnik α. Jest ona szczególnie skuteczna kiedy uzupełniamy równanie uproszczone mnożąc je tylko przez 2^{2k}.

Na stronach 58, 59, 60 omówiliśmy wartości p_n, takie których znajomość pozwala na obliczenie v_2 lub y. Ich wspólna cecha to nieograniczony wzrost począwszy od y lub v_2, albo początkowy spadek i następnie wzrost (z małymi wyjątkami). W PS3 mamy przykłady, że istnieją p_n, które spełniają równanie

$$\pm 1,2,4\,\alpha^n + Dp_{n-1}^2 = m^2$$

tylko od jakiejś wartości n w górę. Pokazaliśmy co można czasem zrobić w takich przypadkach, żeby otrzymać poprawne wyniki, ale nie ma ogólnej zasady jak postępować w takich przypadkach.

— mnożymy D kolejno przez 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 otrzymując nowe D, t i a. Na oryginalnym D i nowych D wykonujemy działania jak niżej, sprawdzając czy w wyniku otrzymaliśmy kwadrat jakiejś liczby.

$$D\cdot 1^2 - 1,2,4\,a_1^n$$
$$D\cdot 2^2 - 1,2,4\,a_1^n$$
$$D\cdot 3^2 - 1,2,4\,a_1^n$$
$$D\cdot 4^2 - 1,2,4\,a_1^n$$
$$D\cdot 5^2 - 1,2,4\,a_1^n$$

Przez a_1 rozumiemy nieparzyste podzielniki oryginalnego i nowego a. Ilość prób z oczywistych względów jest ograniczona. Jeżeli te próby nie skończa się pomyślnie wykonujemy te same obliczenia ze znakiem plus.

$$D\cdot 1^2 + 1,2,4\,a_1^n$$
$$D\cdot 2^2 + 1,2,4\,a_1^n$$
$$D\cdot 3^2 + 1,2,4\,a_1^n$$
$$D\cdot 4^2 + 1,2,4\,a_1^n$$
$$D\cdot 5^2 + 1,2,4\,a_1^n$$

Ilość prób musimy w tym przypadku arbitralnie ograniczyć, najlepiej do największej wartości n jaką osiąga się przy odejmowaniu. Plusem jest to, że znamy już wszystkie wartości a_1.

Od czasu do czasu będzie się zdarzać, że samo przemnożenie D przez te liczby da w wyniku nowe D podlegające pod RG co prawie kończy obliczenia.

Na przykład D = 371 $\quad 371\cdot 4^2 = 77 + 7$ RGIX $\qquad$ D = 346 $\quad 346\cdot 5^2 = 93 + 1$ RGII

Z czego wynika takie postępowanie? Popatrzmy na ogólną postać RP:

$$\pm 1,2,4\,a^n + D p_{n-1}^2 = m^2$$

Bardzo często $\pm 1,2,4\,a^n$ i p_{n-1}^2 mają wspólne podzielniki (szczególnie parzyste potęgi liczby 2). W wielu przypadkach pozwala to znacznie uprościć takie równanie. Postępując jak opisano wyżej będziemy poszukiwać tych uproszczonych równań, następnie znajdować prawidłowe dla danego D ORP, co praktycznie kończy obliczenia.

przykłady dla $D\cdot 1^2 - 1,2,4\,a_1^n$

D = 43 $\qquad 43 = 7^2 - 6 = 5^2 + 2\cdot 3^2 \longrightarrow t = 7 \quad a = 6$ $\quad$ znak "−" $\quad$ grupa "−2"

$43 = 6^2 + 7$

$43 = 5^2 + 2\cdot 3^2$

Ten przykład łatwo rozwiązujemy przez PS1, ale jest on b. dobry dla pokazania omawianego sposobu rozwiązania.

$43 - 3^3 = 4^2$ $\qquad\qquad$ $43 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 3,\ 7$

$-3^3 + 43\cdot 1^2 = 4^2 / 2^4$ uproszczone równanie uzupełniamy do pełnego a^3 i grupy "−2"

$-2\cdot 6^3 + 43\cdot 4^2 = 16^2$ otrzymaliśmy ORP dla D = 43 stąd $p_2 = 4 \quad n = 1$

8 $\quad a p_1^2 - 2tp_2p_1 - (2a^2 - p_2^2) = 0 \longrightarrow 6p_1^2 - 2\cdot 7\cdot 4\,p_1 - (2\cdot 6^2 - 4^2) = 0 \longrightarrow 6p_1^2 - 56p_1 - 56 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{4480}$

11 $\quad a p_1^2 - 2tp_2p_1 + (2a^2 + p_2^2) = 0 \longrightarrow 6p_1^2 - 2\cdot 7\cdot 4\,p_1 + (2\cdot 6^2 + 4^2) = 0 \longrightarrow 6p_1^2 - 56p_1 + 88 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 32$

$p_1 = \frac{56+32}{12} = \frac{88}{12}$ odpada $\qquad p_1 = \frac{56-32}{12} = 2$

$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 7\cdot 2 - 4}{6} = 4$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 7\cdot 4 - 2}{6} = 9$

$43\cdot 9^2 = 59^2 + 2 \longrightarrow$ RGIV $\longrightarrow t = 59 \qquad v_1 = 59$

$y = v_1\cdot v_2 = 59\cdot 9 = 531$

$1 + 43\cdot 531^2 = 3482^2$

$D = 251 \qquad 251 = 16^2 - 5 \longrightarrow t = 16 \quad a = 5$ znak "−" grupa "−2"

$251 = 15^2 + 26$

$251 = 3^2 + 2\cdot 11^2$

$251 - 2\cdot 5^3 = 1^2 \qquad 251 - 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 5, 13$

$-2\cdot 5^3 + 251\cdot 1^2 = 1^2 \longrightarrow p_2 = 1 \quad n = 1$

(8) $ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (2a^2 - p_2^2) = 0 \longrightarrow 5p_1^2 - 2\cdot 16\cdot 1\, p_1 - (2\cdot 5^2 - 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_1^2 - 32\,p_1 - 49 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{2004}$

(11) $ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (2a^2 + p_2^2) = 0 \longrightarrow 5p_1^2 - 2\cdot 16\cdot 1\, p_1 + (2\cdot 5^2 + 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_1^2 - 32\,p_1 + 51 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 2$

$p_1 = \frac{32+2}{10} = \frac{34}{10}$ odpada $\qquad p_1 = \frac{32-2}{10} = 3$

$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 16\cdot 3 - 1}{5} = 19$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 16\cdot 19 - 3}{5} = 121$

$251\cdot 121^2 = 1917^2 + 2 \longrightarrow$ RGIV $\longrightarrow t = 1917 \qquad v_1 = 1917$

$y = v_1\cdot v_2 = 1917\cdot 121 = 231957$

$1 + 251\cdot 231957^2 = 3674890^2$

$D = 512 \qquad 512 = 22^2 + 28 \longrightarrow t = 22 \quad a = 28$ znak "+" grupa "+4"

$512 = 23^2 - 17$

$D = 2^9$

$512 - 7^3 = 13^2 \qquad 512 - 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 7, 17$

$-7^3 + 512\cdot 1^2 = 13^2 / 4^4$

$-4\cdot 28^3 + 512\cdot 16^2 = 208^2 \longrightarrow p_2 = 16 \quad n = 1$

(1) $ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (4a^2 - p_2^2) = 0 \longrightarrow 28p_1^2 - 2\cdot 22\cdot 16p_1 + (4\cdot 28^2 - 16^2) = 0 \longrightarrow 28p_1^2 - 704p_1 + 2880 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 416$

(6) $ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (4a^2 + p_2^2) = 0 \longrightarrow 28p_1^2 - 2\cdot 22\cdot 16p_1 - (4\cdot 28^2 + 16^2) = 0 \longrightarrow 28p_1^2 - 704p_1 - 3392 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{875520}$

$p_1 = \frac{704 + 416}{56} = 20 \qquad p_1 = \frac{704 - 416}{56} = \frac{288}{56}$ odpada

$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} = \frac{2\cdot 22\cdot 20 + 16}{28} = 32$

$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 22\cdot 32 + 20}{28} = 51$

$512\cdot 51^2 = 1154^2 - 4 \longrightarrow$ RGV $\longrightarrow t = 1154 \qquad t_1 = 577 \qquad v_1 = 577$

$y = v_1\cdot v_2 = 577\cdot 51 = 29427$

$1 + 512\cdot 29427^2 = 665857^2$

$D = 1372 \qquad 1372 = 37^2 + 3 \longrightarrow t = 37 \quad a = 3$ znak "+" grupa "+4"

$1372 = 23^2 - 72$

$1372 = 4\cdot 343 = 4\,(172^2 - 171^2) = 4\,(28^2 - 21^2) \qquad 343 = 7^3$

$343 - 2\cdot 3^3 = 17^2 / \triangle \qquad 1372 - 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 3, 9$

Dotychczas w przypadku nieparzystego a w nieparzystej potędze mnozyliśmy obie strony równania przez 2^{2k} lub 4^{2k}, i jedno 2 (lub 4) pozwalało na pokazanie z jaką grupą mamy do czynienia (±2 czy ±4), a pozostała nieparzysta potęga 2 (lub 4) uzupełniała p_n w nieparzystej potędze. W tym przypadku nie jest to mozliwe, ale przekształcenie powyższego równania przy pomocy △−ty rozwiązuje ten problem.

$4\cdot 3^6 + 343\cdot 4\cdot 17^2 = 632^2$

$4\cdot 3^6 + 1372\cdot 17^2 = 632^2 \longrightarrow p_5 = 17 \quad n = 4$

(1) $ap_4^2 - 2tp_5p_4 + (4a^5 - p_5^2) = 0 \longrightarrow 3p_4^2 - 2\cdot 37\cdot 17\,p_4 + (4\cdot 3^5 - 17^2) = 0 \longrightarrow 3p_4^2 - 1258\,p_4 + 683 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{1574368}$

(6) $ap_4^2 - 2tp_5p_4 - (4a^5 + p_5^2) = 0 \longrightarrow 3p_4^2 - 2\cdot 37\cdot 17\,p_4 - (4\cdot 3^5 + 17^2) = 0 \longrightarrow 3p_4^2 - 1258\,p_4 - 1261 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 1264$

$p_4 = \frac{1258+1264}{6} = \frac{2522}{6}$ odpada $\qquad p_4 = \frac{1258 - 1264}{6} = -1$

$$p_3 = \frac{2tp_4 + p_5}{a} = \frac{2\cdot 37\cdot(-1)+17}{3} = -19$$

$$p_2 = \frac{2tp_3 + p_4}{a} = \frac{2\cdot 37\cdot(-19)+(-1)}{3} = -469$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 + p_3}{a} = \frac{2\cdot 37\cdot(-469)+(-19)}{3} = -11575$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} = \frac{2\cdot 37\cdot(-11575)+(-469)}{3} = -285673$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 37\cdot(-285673)+(-11575)}{3} = -7050459$$

$1372\cdot(-7050459)^2 = 261152656^2 - 4 \longrightarrow$ RGV $\longrightarrow t = 261152656$

$t_1 = 130576328 \qquad v_1 = 130576328$

$y = v_1\cdot v_2 = 130576328\cdot(-7050459) = -920623046934552$

$1 + 1372\cdot(-920623046934552)^2 = 34100354867927167^2$

D = 91 $\qquad 91 = 10^2 - 9 \longrightarrow t = 10 \quad a = 9$ $\quad$ znak "−" $\quad$ grupa "+1"

$91 = 9^2 + 10$

$91 = 46^2 - 45^2 = 10^2 - 3^2$

$91 - 3^3 = 8^2/\triangle$ $\qquad$ jak dla D = 1372 $\qquad 91 - 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 3,5,9$

$3^6 + 91\cdot 4\cdot 8^2 = 155^2$

$9^3 + 91\cdot 16^2 = 155^2 \longrightarrow p_2 = 16 \qquad n = 1$

(9) $ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (a^2 - p_2^2) = 0 \longrightarrow 9p_1^2 - 2\cdot 10\cdot 16p_1 - (9^2 - 16^2) = 0 \longrightarrow 9p_1^2 - 320p_1 + 175 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 310$

(10) $ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (a^2 + p_2^2) = 0 \longrightarrow 9p_1^2 - 2\cdot 10\cdot 16p_1 + (9^2 + 16^2) = 0 \longrightarrow 9p_1^2 - 320p_1 + 337 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{90268}$

$p_1 = \frac{320+310}{18} = 35 \qquad p_1 = \frac{320-310}{18} = \frac{10}{18}$ odpada

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 10\cdot 35 - 16}{9} = 76$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 10\cdot 76 - 35}{9} = 165$$

$91\cdot 165^2 = 1574^2 - 1 \longrightarrow$ RGI $\longrightarrow v_1 = 1$

$y = v_1\cdot v_2 = 1\cdot 165 = 165$

$1 + 91\cdot 165^2 = 1574^2$

D = 407 $\qquad 407 = 20^2 + 7 \longrightarrow t = 20 \quad a = 7$ $\quad$ znak "+" $\quad$ grupa "+1"

$407 = 21^2 - 34 \qquad 407 = 11\cdot 37$

$407 = 204^2 - 203^2 = 24^2 - 13^2$

$407 - 7^3 = 8^2 \qquad 407 - 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 7, 17$

$-7^3 + 407\cdot 1^2 = 8^2 \longrightarrow p_2 = 1 \qquad n = 1$

(3) $ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (a^2 - p_2^2) = 0 \longrightarrow 7p_1^2 - 2\cdot 20\cdot 1p_1 + (7^2 - 1^2) = 0 \longrightarrow 7p_1^2 - 40p_1 + 48 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 16$

(4) $ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (a^2 + p_2^2) = 0 \longrightarrow 7p_1^2 - 2\cdot 20\cdot 1p_1 - (7^2 + 1^2) = 0 \longrightarrow 7p_1^2 - 40p_1 - 50 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{3000}$

$p_1 = \frac{40+16}{14} = 4 \qquad p_1 = \frac{40-16}{14} = \frac{24}{14}$ odpada

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} = \frac{2\cdot 20\cdot 4 + 1}{7} = 23$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 20\cdot 23 + 4}{7} = 132$$

$407 \cdot 132^2 = 2663^2 - 1 \longrightarrow$ RGI $\longrightarrow v_1 = 1$

$y = v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot 132 = 132$

$1 + 407 \cdot 132^2 = 2663^2$

Przykłady dla $D \cdot 2^2 - 1, 2, 4\, a_1^n$

$D \cdot 3^2 - 1, 2, 4\, a_1^n$

$D \cdot 4^2 - 1, 2, 4\, a_1^n$

$D \cdot 5^2 - 1, 2, 4\, a_1^n$

$D = 193$ $\quad 193 = 14^2 - 3 \longrightarrow t = 14 \quad a = 3$ znak "$-$" grupa "-1"

$193 = 12^2 + 7^2$ $\quad 193 = 13^2 + 24$

$193 \cdot 2^2 = 772 = 28^2 - 12 = 27^2 + 43$ $\quad 772 - 1, 2, 4\, a_1^n \quad a_1 = 3$

$193 \cdot 2^2 - 3^5 = 23^2$

$-3^5 + 193 \cdot 2^2 = 23^2 \longrightarrow p_4 = 2 \quad n = 3$

9 $ap_3^2 - 2tp_4p_3 - (a^4 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 3p_3^2 - 2\cdot 14\cdot 2p_3 - (3^4 - 2^2) = 0 \longrightarrow 3p_3^2 - 56p_3 - 77 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{4060}$

10 $ap_3^2 - 2tp_4p_3 + (a^4 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 3p_3^2 - 2\cdot 14\cdot 2p_3 + (3^4 + 2^2) = 0 \longrightarrow 3p_3^2 - 56p_3 + 85 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 46$

$p_3 = \frac{56 + 46}{6} = 17$ $\quad p_3 = \frac{56 - 46}{6} = \frac{10}{6}$ odpada

$$p_2 = \frac{2tp_3 - p_4}{a} = \frac{2\cdot 14\cdot 17 - 2}{3} = 158$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 14\cdot 158 - 17}{3} = 1469$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 14\cdot 1469 - 158}{3} = 13658$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 14\cdot 13658 - 1469}{3} = 126985$$

$193 \cdot 126985^2 = 1764132^2 + 1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow t = 1764132 \quad v_1 = 2t = 3528264$

$y = v_1 \cdot v_2 = 3528264 \cdot 126985 = 448036604040$

$1 + 193 \cdot 448036604040^2 = 6224323426849^2$

$D = 349$ $\quad 349 = 19^2 - 12 \longrightarrow t = 19 \quad a = 12$ znak "$-$" grupa "-1"

$349 = 18^2 + 5^2$ $\quad 349 = 18^2 + 25$

$349 \cdot 2^2 = 1396 = 37^2 + 27 = 38^2 - 48$ $\quad 1396 - 1, 2, 4\, a_1^n \quad a_1 = 3, 5, 9, 25, 27$

$349 \cdot 2^2 - 3^3 = 37^2$

$-3^3 + 349 \cdot 2^2 = 37^2 / 4^3$ $\quad$ uzupełniamy składnik "3^3" do pełnego a^3

$-12^3 + 349 \cdot 16^2 = 296^2 \longrightarrow p_2 = 16 \quad n = 1$

9 $ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (a^2 - p_2^2) = 0 \longrightarrow 12p_1^2 - 2\cdot 19\cdot 16p_1 - (12^2 - 16^2) = 0 \longrightarrow 12p_1^2 - 608p_1 + 112 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{364288}$

10 $ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (a^2 + p_2^2) = 0 \longrightarrow 12p_1^2 - 2\cdot 19\cdot 16p_1 + (12^2 + 16^2) = 0 \longrightarrow 12p_1^2 - 608p_1 + 400 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 592$

$p_1 = \frac{608 + 592}{24} = 50$ $\quad p_1 = \frac{608 - 592}{24} = \frac{16}{24}$ odpada

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 19\cdot 50 - 16}{12} = 157$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 19\cdot 157 - 50}{12} = 493$$

$349 \cdot 493^2 = 9210^2 + 1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow t = 9210$ $\qquad v_1 = 2t = 18420$

$y = v_1 \cdot v_2 = 18420 \cdot 493 = 9081060$

$1 + 349 \cdot 9081060^2 = 169648201^2$

D = 179 $\qquad 179 = 13^2 + 10 \longrightarrow t = 13 \quad a = 10$ znak "+" grupa "−2"

$179 = 9^2 + 2\cdot 7^2 \qquad 179 = 14^2 - 17$

$179\cdot 2^2 = 716 = 27^2 - 13 = 26^2 + 40 \qquad 716 \ -1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 5, 17$ odpada

$179\cdot 3^2 = 1611 = 40^2 + 11 = 41^2 - 70 \qquad 1611 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 5, 7, 11$

$179\cdot 3^2 - 2\cdot 11^2 = 37^2$

$-2\cdot 11^2 + 1611\cdot 1^2 = 37^2$ $\qquad$ przechodzimy do nowego $D = 1611 = 40^2 + 11$

stąd $p_1 = 1 \quad n = 0$ $\qquad t = 40 \quad a = 11$ znak "+" grupa "−2"

2 $\ ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 2\cdot 40\cdot 1\, p_0 + (2\cdot 11 - 1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 80\,p_0 + 21 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = 74$

5 $\ ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 2\cdot 40\cdot 1\, p_0 - (2\cdot 11 + 1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 80\,p_0 - 23 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = \sqrt{7412}$

$$p_0 = \frac{80 + 74}{22} = 7 \qquad\qquad p_0 = \frac{80 - 74}{22} = \frac{6}{22} \text{ odpada}$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 40\cdot 7 + 1}{11} = 51$$

$1611\cdot 51^2 = 2047^2 + 2 \longrightarrow$ RGIV $\longrightarrow t = 2027$ $\qquad v_1 = 2047$

$y = v_1 \cdot v_2 = 2047 \cdot 51 = 104397$

$1 + 1611\cdot 104397^2 = 4190210^2$

$1 + 179\cdot 313191^2 = 4190210^2$ $\qquad$ wracamy do oryginalnego D

D = 1061 $\qquad 1061 = 33^2 - 28 \longrightarrow t = 33 \quad a = 28$ znak "−" grupa "±4,−1"

$1061 = 31^2 + 4\cdot 5^2 \qquad 1061 = 32^2 + 37$

$1061\cdot 2^2 = 4244 = 65^2 + 19 = 66^2 - 112 \qquad 4244 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 7, 19, 37$ odpada

$1061\cdot 3^2 = 9549 = 98^2 - 55 = 97^2 + 140 \qquad 9549 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 5, 7, 11, 37$ odpada

$1061\cdot 4^2 = 16976 = 130^2 + 76 = 131^2 - 185 \qquad 16976 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 5, 7, 19, 37$

$1061\cdot 4^2 - 7^5 = 13^2$

$-7^5 + 1061\cdot 4^2 = 13^2 \ / 4^5\cdot 4$

$-4\cdot 28^5 + 1061\cdot 256^2 = 832^2 \longrightarrow p_4 = 256 \quad n = 3$

7 $\ ap_3^2 - 2tp_4p_3 - (4a^4 - p_4^2) = 0 \longrightarrow 28p_3^2 - 2\cdot 33\cdot 256p_3 - (4\cdot 28^4 - 256^2) = 0 \longrightarrow 28p_3^2 - 16896p_3 - 2393088 = 0$

12 $\ ap_3^2 - 2tp_4p_3 + (4a^4 + p_4^2) = 0 \longrightarrow 28p_3^2 - 2\cdot 33\cdot 256p_3 + (4\cdot 28^4 + 256^2) = 0 \longrightarrow 28p_3^2 - 16896p_3 + 2524160 = 0$

7 $\ \sqrt{\triangle} = \sqrt{553500672}$

12 $\ \sqrt{\triangle} = 1664$

$$p_3 = \frac{16896 + 1664}{56} = \frac{18560}{56} \text{ odpada} \qquad\qquad p_3 = \frac{16896 - 1664}{56} = 272$$

$$p_2 = \frac{2tp_3 - p_4}{a} = \frac{2\cdot 33\cdot 272 - 256}{28} = 632$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 33\cdot 632 - 272}{28} = 1480$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 33\cdot 1480 - 632}{28} = 3466$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 33\cdot 3466 - 1480}{28} = 8117$$

$1061 \cdot 8117^2 = 264395^2 + 4 \longrightarrow$ RGVIII $\longrightarrow$ $t = 264395 \quad t_1 = 132197$

$v_1 = 4(2\cdot 132197+1)(132197^2+132197+1)(2\cdot 132197^2+2\cdot 132197+1) =$

$= 6460054678029034711100379780$

$y = v_1 \cdot v_2 = 6460054678029034711100379780 \cdot 8117$

$= 52436262821561674749217826742 60$

$1 + 1061 \cdot 52436263821561674749217826742 60^2 =$

$= 1708006156646353325643305178818 01^2$

D = 137 $\qquad 137 = 12^2 - 7 \longrightarrow t = 12 \quad a = 7$ znak "−" grupa "−1"

$137 = 11^2 + 4^2 \qquad 137 = 11^2 + 16$

$137 \cdot 2^2 = 548 = 23^2 + 19 = 24^2 - 28 \qquad 548 \;-1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 7, 19$ odpada

$137 \cdot 3^2 = 1233 = 35^2 + 8 = 36^2 - 63 \qquad 1233 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 3, 7, 9, 63$ odpada

$137 \cdot 4^2 = 2192 = 47^2 - 17 = 46^2 + 76 \qquad 2192 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 7, 17, 19$ odpada

$137 \cdot 5^2 = 3425 = 59^2 - 56 = 58^2 + 61 \qquad 3425 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 7, 61$

$137 \cdot 5^2 - 7^4 = 32^2$

$-7^4 + 137 \cdot 5^2 = 32^2 \longrightarrow p_3 = 5 \qquad n = 2$

9 $ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 2\cdot 12\cdot 5p_2 - (7^3 - 5^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 120\,p_2 - 318 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = \sqrt{23304}$

10 $ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 2\cdot 12\cdot 5p_2 + (7^3 + 5^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 120\,p_2 + 368 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = 64$

$p_2 = \frac{120+64}{14} = \frac{184}{14}$ odpada $\qquad p_2 = \frac{120-64}{14} = 4$

$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 12\cdot 4 - 5}{7} = 13$

$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 12\cdot 13 - 4}{7} = 44$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 12\cdot 44 - 13}{7} = 149$

$137 \cdot 149^2 = 1744^2 + 1 \longrightarrow$ RGII $\longrightarrow t = 1744 \qquad v_1 = 2t = 3488$

$y = v_1 \cdot v_2 = 3488 \cdot 149 = 519712$

$1 + 137 \cdot 519712^2 = 6083073^2$

D = 541 $\qquad 541 = 23^2 + 12 \longrightarrow t = 23 \quad a = 12$ znak "+" grupa "±4,−1"

$541 = 21^2 + 4\cdot 5^2 \qquad 541 = 24^2 - 35$

uzupełnianie $4\cdot 5^2$ przez 7^2 nie prowadzi do rozwiązania

$541 \cdot 2^2 = 2164 = 47^2 - 45 = 46^2 + 48 \qquad 2164 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 3, 5, 7, 9, 15$ odpada

$541 \cdot 3^2 = 4869 = 70^2 - 31 = 108^2 + 140 \qquad 4869 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 3, 5, 7, 9, 27, 31$ odpada

$541 \cdot 4^2 = 8656 = 93^2 + 7 = 94^2 - 180 \qquad 8656 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 3, 5, 7, 9$ odpada

$541 \cdot 5^2 = 13525 = 116^2 + 69 = 117^2 - 164 \qquad 13525 - 1,2,4\,a_1^n \qquad a_1 = 3, 5, 7, 23, 41$

$541 \cdot 5^2 - 4\cdot 3^6 = 103^2$

$-4\cdot 3^6 + 541 \cdot 5^2 = 103^2 / 4^6$ $\qquad$ uzupełniamy składnik "$-4\cdot 3^6$" do pełnego a^2

$-4\cdot 12^6 + 541 \cdot 320^2 = 6592^2 \longrightarrow p_5 = 320 \qquad n = 4$

1 $ap_4^2 - 2tp_5p_4 + (4a^5 - p_5^2) = 0 \longrightarrow 12p_4^2 - 2\cdot 23\cdot 320p_4 + (4\cdot 12^5 - 320^2) = 0 \longrightarrow 12p_4^2 - 14720p_4 + 892928 = 0$

6 $ap_4^2 - 2tp_5p_4 - (4a^5 + p_5^2) = 0 \longrightarrow 12p_4^2 - 2\cdot 23\cdot 320p_4 - (4\cdot 12^5 + 320^2) = 0 \longrightarrow 12p_4^2 - 14720p_4 - 1097728 = 0$

1 $\sqrt{\triangle} = 13184$

6 $\sqrt{\triangle} = \sqrt{269369344}$

$p_4 = \frac{14720 + 13184}{24} = \frac{27904}{24}$ odpada $\qquad p_4 = \frac{14720 - 13184}{24} = 64$

$$p_3 = \frac{2tp_4 + p_5}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 64 + 320}{12} = 272$$

$$p_2 = \frac{2tp_3 + p_4}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 272 + 64}{12} = 1048$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 + p_3}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 1048 + 272}{12} = 4040$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 4040 + 1048}{12} = 15574$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 23\cdot 15574 + 4040}{12} = 60037$$

$541 \cdot 60037^2 = 1396425^2 + 4 \longrightarrow$ RGVIII $\longrightarrow t_1 = 698212$

$v_1 = 4(2\cdot 698212 + 1)(698212^2 + 698212 + 1)(2\cdot 698212^2 + 2\cdot 698212 + 1) =$
$= 2654960602982662526062047383700$

$y = v_1 \cdot v_2 = 2654960602982662526062047383700 \cdot 60037 =$
$= 159395869721270110077187138775196900$

$1 + 541\cdot 159395869721270110077187138775196900^2 =$
$= 3707453360023867028800645599667005001^2$

---

przykłady dla $D\cdot 1^2 + 1, 2, 4\, a_1^n$

D = 964 $\qquad 964 = 31^2 + 3 \longrightarrow t = 31 \quad a = 3$ $\quad$ znak "+" $\quad$ grupa "−4"

$964 = 4(15^2 + 4^2) \qquad 964 = 30^2 + 64$

$964\cdot 1^2 = 31^2 + 3 = 32^2 - 60 \qquad\qquad 964 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 3$

$4\cdot 3^5 + 964\cdot 1^2 = 44^2 \longrightarrow p_4 = 1 \qquad n = 3$

1 $ap_3^2 - 2tp_4p_3 + (4a^4 - p_4^2) = 0 \longrightarrow 3p_3^2 - 2\cdot 31\cdot 1p_3 + (4\cdot 3^4 - 1^2) = 0 \longrightarrow 3p_3^2 - 62p_3 + 323 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = \sqrt{4155}$

6 $ap_3^2 - 2tp_4p_3 - (4a^4 + p_4^2) = 0 \longrightarrow 3p_3^2 - 2\cdot 31\cdot 1p_3 - (4\cdot 3^4 + 1^2) = 0 \longrightarrow 3p_3^2 - 62p_3 - 325 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = 88$

$p_3 = \frac{62 + 88}{6} = 25 \qquad\qquad p_3 = \frac{62 - 88}{6} = \frac{-26}{6}$ odpada

$$p_2 = \frac{2tp_3 + p_4}{a} = \frac{2\cdot 31\cdot 25 + 1}{3} = 517$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 + p_3}{a} = \frac{2\cdot 31\cdot 517 + 25}{3} = 10693$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} = \frac{2\cdot 31\cdot 10693 + 517}{3} = 221161$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 31\cdot 221161 + 10693}{3} = 4574225$$

$964\cdot 4574225^2 = 142022136^2 + 4 \longrightarrow$ RGVI $\longrightarrow t = 142022136 \qquad v_1 = t_1 = 71011068$

$y = v_1\cdot v_2 = 71011068\cdot 4574225 = 324820602522300$

$1 + 964\cdot 324820602522300^2 = 10085143557001249^2$

D = 683 $\qquad 683 = 26^2 + 7 \longrightarrow t = 26 \quad a = 7$ $\quad$ znak "+" $\quad$ grupa "−2"

$683 = 2\cdot 11^2 + 21^2 \qquad 683 = 27^2 - 46$

$683\cdot 1^2 = 26^2 + 7 = 27^2 - 46 \qquad\qquad 683 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 7, 23$

$2\cdot 7^3 + 683\cdot 1^2 = 37^2 \longrightarrow p_2 = 1 \qquad n = 1$

8 $ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (2a^2 - p_2^2) = 0 \longrightarrow 7p_1^2 - 2\cdot 26\cdot 1\, p_1 + (2\cdot 7^2 - 1^2) = 0 \longrightarrow 7p_1^2 - 52p_1 + 97 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{5420}$

11 $ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (2a^2 + p_2^2) = 0 \longrightarrow 7p_1^2 - 2\cdot 26\cdot 1\, p_1 - (2\cdot 7^2 + 1^2) = 0 \longrightarrow 7p_1^2 - 52p_1 - 99 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 74$

$p_1 = \frac{52 + 74}{14} = 9 \qquad\qquad p_1 = \frac{52 - 74}{14} = \frac{-22}{14}$ odpada

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} = \frac{2\cdot 26\cdot 9 + 1}{7} = 67$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 26\cdot 67 + 9}{7} = 499$$

$683 \cdot 499^2 = 13041^2 + 2 \longrightarrow \text{RGIV} \longrightarrow t = 13041 \qquad v_1 = 13041$

$y = v_1 \cdot v_2 = 13041 \cdot 499 = 6507459$

$1 + 683 \cdot 6507459^2 = 170067682^2$

---

przykłady dla $D \cdot 2^2 + 1, 2, 4\, a_1^n$

$D \cdot 3^2 + 1, 2, 4\, a_1^n$

$D \cdot 4^2 + 1, 2, 4\, a_1^n$

$D \cdot 5^2 + 1, 2, 4\, a_1^n$

$D = 209 \qquad 209 = 14^2 + 13 \longrightarrow t = 14 \quad a = 13$ znak "+" grupa "+1"

$209 = 15^2 - 16$

$209 = 104^2 - 103^2 = 15^2 - 4^2$

$209 \cdot 2^2 = 836 = 29^2 - 5 = 28^2 + 52 \qquad 836 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 5, 13$

$5^3 + 209 \cdot 2^2 = 31^2$

$5^3 + 836 \cdot 1^2 = 31^2$ przechodzimy do nowego D

$836 = 29^2 - 5 \longrightarrow t = 29 \quad a = 5$ znak "−" grupa "+1"

stąd $p_2 = 1 \qquad n = 1$

9 $ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (a^2 - p_2^2) = 0 \longrightarrow 5p_1^2 - 2\cdot 29 \cdot 1 p_1 - (5^2 - 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_1^2 - 58p_1 - 24 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 62$

10 $ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (a^2 + p_2^2) = 0 \longrightarrow 5p_1^2 - 2\cdot 29 \cdot 1 p_1 + (5^2 + 1^2) = 0 \longrightarrow 5p_1^2 - 58p_1 + 26 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{2844}$

$$p_1 = \frac{58 + 62}{10} = 12 \qquad p_1 = \frac{58 - 62}{10} = \frac{-4}{10} \text{ odpada}$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 29 \cdot 12 - 1}{5} = 139$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 29 \cdot 139 - 12}{5} = 1610$$

$836 \cdot 1610^2 = 46551^2 - 1 \longrightarrow \text{RGI}^- \longrightarrow v_1 = 1$

$y = v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot 1610 = 1610$

$1 + 836 \cdot 1610^2 = 46551^2$

$1 + 209 \cdot 3220^2 = 46551^2$ wracamy do oryginalnego D

$D = 536 \qquad 536 = 23^2 + 7 \longrightarrow t = 23 \quad a = 7$ znak "+" grupa "+1"

$536 = 2^3(34^2 - 33^2) \qquad 536 = 24^2 - 40$

$536 \cdot 2^2 = 2144 = 46^2 + 28 = 47^2 - 65 \qquad 2144 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 5, 7, 13$ odpada

$536 \cdot 3^2 = 4824 = 69^2 + 63 = 70^2 - 76 \qquad 4824 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 3, 5, 7, 9$

$7^4 + 536 \cdot 3^2 = 85^2 \longrightarrow p_3 = 3 \qquad n = 2$

3 $ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 2\cdot 23 \cdot 3p_2 + (7^3 - 3^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 138p_2 + 334 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{9692}$

4 $ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 2\cdot 23 \cdot 3p_2 - (7^3 + 3^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 138p_2 - 352 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 170$

$$p_2 = \frac{138 + 170}{14} = 22 \qquad p_2 = \frac{138 - 170}{14} = \frac{-32}{14} \text{ odpada}$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 + p_3}{a} = \frac{2\cdot 23 \cdot 22 + 3}{7} = 145$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} = \frac{2\cdot 23 \cdot 145 + 22}{7} = 956$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2\cdot 23 \cdot 956 + 145}{7} = 6303$$

$536 \cdot 6303^2 = 145925^2 - 1 \longrightarrow$ RGI $\longrightarrow v_1 = 1$

$y = v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot 6303 = 6303$

$1 + 536 \cdot 6303^2 = 145925^2$

D = 385 $\qquad 385 = 20^2 - 15 \longrightarrow t = 20 \quad a = 15$ znak "−" grupa "+1"

$385 = 19^2 + 24 \qquad 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$

$385 = 193^2 - 192^2 = 41^2 - 36^2 = 31^2 - 24^2 = 23^2 - 12^2$

$24^2 + 385 \cdot 1^2 = 31^2$ nie prowadzi do rozwiązania

$12^2 + 385 \cdot 1^2 = 23^2 / 2^2$ nie prowadzi do rozwiązania

$385 \cdot 2^2 = 1540 = 39^2 + 19 = 40^2 - 60 \qquad 1540 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 3, 5, 19$ odpada

$385 \cdot 3^2 = 3465 = 59^2 - 16 = 58^2 + 101 \qquad 3465 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 3, 5$ odpada

$385 \cdot 4^2 = 6160 = 78^2 + 76 = 79^2 - 81 = 79^2 - 3^4$ sprawdzamy

$3^4 + 385 \cdot 4^2 = 79^2 / 5^4$

$15^4 + 385 \cdot 100^2 = 1975^2 \longrightarrow p_3 = 100 \qquad n = 2$

9 $\; ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 15p_2^2 - 2 \cdot 20 \cdot 100 p_2 - (15^3 - 100^2) = 0 \longrightarrow 15p_2^2 - 4000p_2 + 6625 = 0$

10 $\; ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 15p_2^2 - 2 \cdot 20 \cdot 100 p_2 + (15^3 + 100^2) = 0 \longrightarrow 15p_2^2 - 4000p_2 + 13375 = 0$

9 $\; \sqrt{\triangle} = 3950$

10 $\; \sqrt{\triangle} = \sqrt{15197500}$

$$p_2 = \frac{4000 + 3950}{30} = 265 \qquad\qquad p_2 = \frac{4000 - 3950}{30} = \frac{50}{30} \text{ odpada}$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 265 - 100}{15} = 700$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 700 - 265}{15} = 1849$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 1849 - 700}{15} = 4884$$

$385 \cdot 4884^2 = 95831^2 - 1 \longrightarrow$ RGI $\longrightarrow v_1 = 1$

$y = v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot 4884 = 4884$

$1 + 385 \cdot 4884^2 = 95831^2$

D = 1005 $\qquad 1005 = 32^2 - 19 \longrightarrow t = 32 \quad a = 19$ znak "−" grupa "±4−1"

$1005 = 31^2 + 44 \qquad 1005 = 3 \cdot 5 \cdot 67$

$1005 = 503^2 - 502^2 = 56117^2 - 56108^2 = 20213^2 - 20188^2 = 2357^2 - 2132^2$

$1005 \cdot 2^2 = 4020 = 63^2 + 51 = 64^2 - 76 \qquad 4020 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 3, 11, 17, 19$ odpada

$1005 \cdot 3^2 = 9045 = 95^2 - 20 = 96^2 + 171 \qquad 9045 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 3, 5, 9, 11, 19$ odpada

$1005 \cdot 4^2 = 16080 = 127^2 - 49 = 126^2 + 204 \qquad 16080 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 3, 5, 11, 19$ odpada

$1005 \cdot 5^2 = 25125 = 159^2 - 156 = 158^2 + 161 \qquad 25125 + 1, 2, 4\, a_1^n \qquad a_1 = 3, 7, 11, 13, 19$

$4 \cdot 19^2 + 1005 \cdot 5^2 = 163^2 \longrightarrow p_1 = 5 \qquad n = 0$

7 $\; ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 19p_0^2 - 2 \cdot 32 \cdot 5 p_0 - (4 \cdot 19 - 5^2) = 0 \longrightarrow 19p_0^2 - 320p_0 - 51 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = 326$

12 $\; ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 19p_0^2 - 2 \cdot 32 \cdot 5 p_0 + (4 \cdot 19 + 5^2) = 0 \longrightarrow 19p_0^2 - 320p_0 + 101 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = \sqrt{94724}$

$$p_0 = \frac{320 + 326}{38} = 17 \qquad\qquad p_0 = \frac{320 - 326}{38} = \frac{-6}{38} \text{ odpada}$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2 \cdot 32 \cdot 17 - 5}{19} = 57$$

$1005 \cdot 57^2 = 1807^2 - 4 \longrightarrow$ RGVII $\longrightarrow t_1 = 903 \qquad v_1 = 2t_1(t_1 + 1) = 2 \cdot 903(903 + 1) = 1632624$

$y = v_1 \cdot v_2 = 1632624 \cdot 57 = 93059568$

$1 + 1005 \cdot 93059568^2 = 2950149761^2$

— przekształcamy rozkład danego D przy pomocy $\triangle$ –ty i sprawdzamy czy nowe a pozwala na kontynuawanie obliczeń.

$D = 1277$ $\quad 1277 = 36^2 - 19 \longrightarrow t = 36 \quad a = 19$ znak "–" grupa "+1"

$1277 = 35^2 + 52$

$1277 = 11^2 + 4\cdot 17^2$

$1277 - 4\cdot 17^2 - 11^2 = 0 \,/\, \triangle$

$16\cdot 17^4 + 1277\cdot 4\cdot 11^2 = 1398^2 \,/\!:4$

$4\cdot 17^4 + 1277\cdot 11^2 = 699^2$

$1277\cdot 11^2 = 154517 = 393^2 + 68 \longrightarrow t = 393 \quad a = 68 = 4\cdot 17$ znak "+" grupa "+4"

$4\cdot 17^4 + 154517\cdot 1^2 = 699^2 \,/\, 4^4$

$4\cdot 68^4 + 154517\cdot 16^2 = 11184^2 \longrightarrow p_3 = 16 \quad n = 2$

1 $\; ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (4a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 68p_2^2 - 2\cdot 393\cdot 16p_2 + (4\cdot 68^3 - 16^2) = 0 \longrightarrow 68p_2^2 - 12576p_2 + 1257472 = 0$

6 $\; ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (4a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 68p_2^2 - 2\cdot 393\cdot 16p_2 - (4\cdot 68^3 + 16^2) = 0 \longrightarrow 68p_2^2 - 12576p_2 - 1257984 = 0$

1 $\; \sqrt{\triangle} = \sqrt{-183876608}$

6 $\; \sqrt{\triangle} = 22368$

$p_2 = \dfrac{12576 + 22368}{136} = \dfrac{34944}{136}$ odpada

$p_2 = \dfrac{12576 - 22368}{136} = -72$

$p_1 = \dfrac{2tp_2 + p_3}{a} = \dfrac{2\cdot 393(-72) + 16}{68} = -832$

$p_0 = \dfrac{2tp_1 + p_2}{a} = \dfrac{2\cdot 393(-832) + (-72)}{68} = -9618$

$v_2 = \dfrac{2tp_0 + p_1}{a} = \dfrac{2\cdot 393(-9618) + (-832)}{68} = -111185$

Sprawdzamy czy rozwiązaniem dla $D = 1277$ będzie $v_2 = -111185$ (wyjaśnienie na następnej stronie)

$1 + 1277\cdot(-111185)^2 = 3973211.182^2..$

$154517\cdot(-111185)^2 = 43705323^2 - 4 \longrightarrow$ RGVII $\longrightarrow t_1 = 21852661$

$v_1 = 2\cdot 21852661(21852661 + 1) = 955077629267164$

$y = v_1\cdot v_2 = 955077629267164\cdot 111185 = 106190306210069629340$

$1 + 154517\cdot 106190306210069629340^2 = 41741976277195612208649^2$ wracamy do $D = 1277$

$1 + 1277\cdot 1168093368310765922740^2 = 41741976277195612208649^2$

$D = 134$ $\quad 134 = 12^2 - 10 \longrightarrow t = 13 \quad a = 10$ znak "+" grupa "–2"

$134 = 6^2 + 2\cdot 7^2 \qquad 134 = 11^2 + 13$

$134 - 2\cdot 7^2 - 6^2 = 0 \,/\, \triangle$

$4\cdot 7^4 + 134\cdot 2^2\cdot 6^2 = 170^2 \,/\!:4 \qquad 134\cdot 2^2 = 536 = 23^2 + 7$

$7^4 + 536\cdot 3^2 = 85^2 \longrightarrow p_3 = 3 \quad n = 2 \quad t = 23 \quad a = 7$ znak "+" grupa "+1"

3 $\; ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 2\cdot 23\cdot 3p_2 + (7^3 - 3^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 138p_2 + 334 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = \sqrt{9692}$

4 $\; ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 2\cdot 23\cdot 3p_2 - (7^3 + 3^2) = 0 \longrightarrow 7p_2^2 - 138p_2 - 352 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = 170$

$p_2 = \dfrac{138 + 170}{14} = 22$

$p_2 = \dfrac{138 - 170}{14} = -\dfrac{32}{14}$ odpada

$p_1 = \dfrac{2tp_2 + p_3}{a} = \dfrac{2\cdot 23\cdot 22 + 3}{7} = 145$

$p_0 = \dfrac{2tp_1 + p_2}{a} = \dfrac{2\cdot 23\cdot 145 + 22}{7} = 956$

$v_2 = \dfrac{2tp_0 + p_1}{a} = \dfrac{2\cdot 23\cdot 956 + 145}{7} = 6303$

Sprawdzamy czy rozwiązaniem dla D = 134 będzie $v_2 = 6303$ (wyjaśnienie poniżej)

$$1 + 134 \cdot 6303^2 = 72962.50001^2..$$

$$536 \cdot 6303^2 = 145925^2 - 1 \longrightarrow \text{RGI} \longrightarrow v_1 = 1$$

$$y = v_1 \cdot v_2 = 1 \cdot 6303 = 6303$$

$$1 + 536 \cdot 6303^2 = 145925^2 \quad \text{wracamy do D = 134}$$

$$1 + 134 \cdot 12606^2 = 145925^2$$

D = 211 $\quad 211 = 15^2 - 14 \longrightarrow t = 15 \quad a = 14$ znak "+" grupa "−2"

$211 = 7^2 + 2 \cdot 9^2 \quad 211 = 14^2 + 15$

$211 - 2 \cdot 9^2 - 7^2 = 0 \, / \triangle$

$4 \cdot 9^4 + 211 \cdot 2^2 \cdot 7^2 = 260^2 \quad 211 \cdot 2^2 = 844 = 29^2 + 3 \longrightarrow t = 29 \quad a = 3$ znak "+" grupa "+4"

$4 \cdot 3^8 + 844 \cdot 7^2 = 260^2 \longrightarrow p_7 = 7 \quad n = 6$

1 $\; ap_6^2 - 2tp_7p_6 + (4a^7 - p_7^2) = 0 \longrightarrow 3p_6^2 - 2 \cdot 29 \cdot 7p_6 + (4 \cdot 3^7 - 7^2) = 0 \longrightarrow 3p_6^2 - 406p_6 + 8699 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = \sqrt{60448}$

6 $\; ap_6^2 - 2tp_7p_6 - (4a^7 + p_7^2) = 0 \longrightarrow 3p_6^2 - 2 \cdot 29 \cdot 7p_6 - (4 \cdot 3^7 + 7^2) = 0 \longrightarrow 3p_6^2 - 406p_6 - 8797 = 0 \qquad \sqrt{\triangle} = 520$

$p_6 = \frac{406 + 520}{6} = \frac{926}{6}$ odpada $\qquad p_6 = \frac{406 - 520}{6} = -19$

$$p_5 = \frac{2tp_6 + p_7}{a} = \frac{2 \cdot 29 \cdot (-19) + 7}{3} = -365$$

$$p_4 = \frac{2tp_5 + p_6}{a} = \frac{2 \cdot 29 \cdot (-365) + (-19)}{3} = -7063$$

$$p_3 = \frac{2tp_4 + p_5}{a} = \frac{2 \cdot 29 \cdot (-7063) + (-365)}{3} = -136673$$

$$p_2 = \frac{2tp_3 + p_4}{a} = \frac{2 \cdot 29 \cdot (-136673) + (-7063)}{3} = -2644699$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 + p_3}{a} = \frac{2 \cdot 29 \cdot (-2644699) + (-136673)}{3} = -51176405$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} = \frac{2 \cdot 29 \cdot (-51176405) + (-2644699)}{3} = -990292063$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2 \cdot 29 \cdot (-990292063) \; + (-51176405)}{3} = -19162705353$$

Sprawdzamy czy rozwiązaniem dla D = 211 będzie $v_2 = -19162705353$ (wyjaśnienie poniżej)

$$1 + 211 \cdot (-19162705353)^2 = 278354373650^2$$

Przy okazji skończymy obliczenia dla D = 844.

$$844 \cdot (-19162705353)^2 = 556708747300^2 - 4 \longrightarrow \text{RGV} \longrightarrow t = 556708747300$$

$$t_1 = 278354373650 \quad v_1 = 278354373650$$

$$y = v_1 \cdot v_2 = 278354373650 \cdot (-19162705353) = -5334022845973817148450$$

$$1 + 844 \cdot (-5334022845973817148450)^2 = 154962314660167628644999^2$$

Kiedy przekształcamy oryginalne D przy pomocy $\triangle$−ty to nowe D staje się iloczynem oryginalnego D i liczb w potędze drugiej. Po rozwiązaniu RP dla nowego D włączamy te liczby w y^2 i otrzymujemy rozwiązanie dla oryginalnego D. Problem w tym, że nie zawsze będzie to rozwiązanie najmniejsze. Na stronie 8−mej omówiono to szerzej. Żeby tego uniknąć należy sprawdzać czy v_2 obliczone dla nowego D nie jest już przypadkiem y dla oryginalnego D. W naszych przykładach potwierdza się to dla D = 211, a dla pozostałych dwóch daje pewność, że włączając kwadratowe składniki nowego D w y mamy do czynienia z rozwiązaniem najmniejszym,

— sprawdzamy czy D jest postaci $D_1 \cdot k^2$ i jeżeli tak, to możemy spróbować rozwiązać RP dla D_1 i sprawdzić czy w y lub x występuje podzielnik k. Takie postępowanie kontynuujemy dla kolejnych rozwiązań D_1, aż do skutku.

$D = 931$	$931 = 31^2 - 30 \longrightarrow t = 31 \quad \alpha = 30$ znak "–" grupa "+1"
$931 = 19 \cdot 7^2$	$931 = 30^2 + 31$
$D_1 = 19$	rozwiązano strona 35
$1 + 19 \cdot 39^2 = 170^2$	przekształcamy to równanie przy pomocy △–ty
$1 + 19 \cdot 4 \cdot 39^2 \cdot 170^2 = 57799^2$	otrzymaliśmy drugie z kolei rozwiązanie w którym $57799 = 7 \cdot 8257$ więc powtarzamy przekształcenie przy pomocy △–ty

$1 + 19 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 39^2 \cdot 170^2 \cdot 7^2 \cdot 8257^2 = 6681448801^2$ Jest to 4–te z kolei rozwiązanie dla D = 19.

$1 + 931 \cdot 218975640^2 = 6681448801^2$

Możemy jeszcze sprawdzić czy 3–cie z kolei rozwiazanie nie zawiera 7^2. W rozdziale "Rozwiązania większe od najmniejszego" opisano odpowiednie postępowanie.

$1 + 19 \cdot 84319^2 = 367538^2$	ani x ani y nie dzieli się przez 7 w 3–cim kolejnym rozwiązaniu

---

$D = 338$	$338 = 18^2 + 14 \longrightarrow t = 18 \quad \alpha = 14$ znak "+" grupa "–1"	
$338 = 2 \cdot 13^2$	$338 = 19^2 - 23$	
$D_1 = 2$		
$1 + 2 \cdot 2^2 = 3^2$	1	
$1 + 2 \cdot 12^2 = 17^2$	2	
$1 + 2 \cdot 70^2 = 99^2$	3	
$1 + 2 \cdot 408^2 = 577^2$	4	
$1 + 2 \cdot 2378^2 = 3363^2$	5	
$1 + 2 \cdot 13860^2 = 19601^2$	6	
$1 + 2 \cdot 80782^2 = 114243^2$	7	dopiero w rozwiązaniu numer 7 w y występuje podzielnik 13
$80782 = 13 \cdot 6214$		
$1 + 338 \cdot 6214^2 = 114243^2$		

$D = 504$	$504 = 22^2 + 20 \longrightarrow t = 18 \quad \alpha = 14$ znak "+" grupa "+1"
$504 = 14 \cdot 6^2$	$504 = 23^2 - 25$
$D_1 = 14$	
$1 + 14 \cdot 4^2 = 15^2$ /△	
$1 + 14 \cdot 120^2 = 449^2$	
$120 = 6 \cdot 20$	
$1 + 504 \cdot 20^2 = 449^2$	

$D = 1587$	$1587 = 40^2 - 13 \longrightarrow t = 18 \quad \alpha = 14$ znak "+" grupa "+1"
$1587 = 3 \cdot 23^2$	$1587 = 39^2 + 66$
$D_1 = 3$	
$1 + 3 \cdot 4^2 = 7^2$ /△	1
$1 + 3 \cdot 56^2 = 97^2$	2
$1 + 3 \cdot 209^2 = 362^2$	3
$1 + 3 \cdot 780^2 = 1351^2$	4

$D_1 = 3$

$1 + 3 \cdot 4^2 = 7^2 / \triangle$ 1

$1 + 3 \cdot 56^2 = 97^2$ 2

$1 + 3 \cdot 209^2 = 362^2$ 3

$1 + 3 \cdot 780^2 = 1351^2$ 4

$1 + 3 \cdot 2911^2 = 5042^2$ 5

$1 + 3 \cdot 10864^2 = 18817^2$ 6

$1 + 3 \cdot 40545^2 = 70226^2$ 7

$1 + 3 \cdot 151316^2 = 262087^2$ 8

$1 + 3 \cdot 564719^2 = 978122^2$ 9 dopiero w rozwiązaniu numer 9 w y występuje podzielnik 23

$564719 = 23 \cdot 24553$

$1 + 1587 \cdot 24553^2 = 978122^2$

$D = 279$ $279 = 17^2 - 10 \longrightarrow t = 17 \quad \alpha = 10$ znak "+" grupa "+1"

$279 = 16^2 + 23$

$279 = 31 \cdot 3^2$

$D_1 = 31$ rozwiązaliśmy (strona 35)

$1 + 31 \cdot 273^2 = 1520^2$

$1 + 31 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 = 1520^2$

$1 + 279 \cdot 91^2 = 1520^2$

$D = 369$ $369 = 19^2 + 8 \longrightarrow t = 19 \quad \alpha = 8$ znak "+" grupa "+1"

$369 = 20^2 - 31$

$369 = 41 \cdot 3^2$

$D_1 = 41$ rozwiązaliśmy (strona 65)

$1 + 41 \cdot 320^2 = 2049^2$

$1 + 41 \cdot 320^2 = 3^2 \cdot 683^2 / \triangle$

$1 + 41 \cdot 320^2 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 683^2 = 8396801^2$

$1 + 369 \cdot 437120^2 = 8396801^2$

Do liczb postaci $D_1 \cdot k^2$ jeszcze wrócimy w PS8 rozpatrując przypadki kiedy D_1 podlega pod RG.

przypatrzmy się wartościom p_n dla ponad 30–tu kolejnych D (z pominięciem D podlegajacych RG).

					Grupa
$D=103=10^2+3$	$p_0=7$	$p_1=1$	$p_2=1$	$p_3=-17=2t-a$	+2
$D=106=10^2+6$	$p_1=34$	$p_2=10$	$p_3=4$	$p_3=-20$	−1
$D=107=10^2+7$	$v_2=3$	$p_0=1$	$p_1=1$	$p_2=-13=2t-a$	−2
$D=109=10^2+9$	$p_0=11$	$p_1=5$	$p_2=-1$		±4−1
$D=111=11^2-10$	$p_2=2$	$p_3=-16$			+1
$D=112=11^2-9$	$p_0=5$	$p_1=2$	$p_2=-1$	$p_3=-40$	+1
$D=113=11^2-8$	$p_2=4$	$p_3=8$			−1
$D=114=11^2-7$	$p_0=1$	$p_1=1$	$p_2=15$		−2
$D=115=11^2-6$	$p_1=8$	$p_2=2$	$p_2=-4$		+1
$D=116=11^2-5$	$p_1=1$	$p_2=7$			−4
$D=118=11^2-3$	$p_0=7$	$p_1=1$	$p_2=1$	$p_3=19=2t-a$	−2
$D=124=11^2+3$	$p_1=5$	$p_2=1$	$p_3=7$		+4
$D=126=11^2+5$	$p_1=2$	$p_2=1$	$p_3=-12$		+1
$D=127=11^2+6$	$p_1=14$	$p_2=4$	$p_3=-4$		+2
$D=128=11^2+7$	$p_0=1$	$p\ =-1$			+4
$D=129=11^2+8$	$p_4=16$				+1
$D=130=11^2+9$	$p_0=2$	$p_1=1$	$p_2=-4$		−1
$D=131=11^2+10$	$p_0=4$	$p_1=2$	$p_2=-4$		−2
$D=133=12^2-11$	$p_0=7$	$p_1=3$	$p_2=-5$		+4
$D=134=12^2-10$	$p_0=14=2t-a$	$p_1=6$	$p_2=4$		−2
$D=135=12^2-9$	$p_1=3$	$p_2=0$	$p_3=-27$		+1
$D=137=12^2-7$	$p_1=13$	$p_2=4$	$p_3=5$		−1
$D=139=12^2-5$	$p_2=7$	$p_3=3$			−2
$D=149=12^2+5$	$p_0=1$	$p_1=1$	$p_2=-19=2t-a$		±4−1
$D=151=12^2+7$	$p_3=23$				+2
$D=153=12^2+9$	$p_1=24$	$p_2=9$	$p_3=0$	$p_4=81$	+1
$D=154=12^2+10$	$p_3=48$	$p_4=28$			+1
$D=155=12^2+11$	$p_1=4$				+1
$D=157=13^2-12$	$p_0=8$	$p_1=4$	$p_2=8$		±4−1
$D=158=13^2-11$	$p_1=1$				+2
$D=159=13^2-10$	$p_1=16$	$p_2=6$	$p_3=-4$		+1
$D=161=13^2-8$	$p_3=8$	$p_4=16$			+1
$D=162=13^2-7$	$p_1=1$	$p_2=5$			−2
$D=163=13^2-6$	$p_2=8$	$p_3=4$			−2
$D=164=13^2-5$	$p_0=1$	$p_1=1$	$p_2=21=2t-a$		−4

Powyzsze wartości p_n dla D należących do grupy "+1" i jakiejś innej grupy należą do ciągu zaczynającego się od v_2 (bo najmniejsze). Ponadto są to poprawne wartości w tym sensie, że nie pochodzą z równań uproszczonych. Na pierwszy rzut oka można zauważyć, że często p_n jest równe 1, 2, 4, 8, 16... czyli 2^k począwszy od $k=0$, Następnie mozna dostrzec $p_n=2^k\pm 1$ i rzadziej $p_n=2^k\pm 2$, czy ± 4. Jest też kilka przypadków $p_n=2t-a$. Bardzo możliwe, a raczej pewne, że bywają to zależności przy–

padkowe, ale już sama ich ilość skłania do rozwiązania RP metodą prób. Znaki minus przy wartościach p_n nie mają znaczenia przy próbach znalezienia rozwiązania, bo w ORP mamy p_n^2.

Przypatrując się tym i innym wartościom p_n można dopatrywać się związków między podzielnikami t, a i p_n, ale na razie niech wystarczy to co wymieniliśmy. Można dodać, że nadzwyczaj często mamy $p_n = 2^k$, jeżeli a jest parzyste.

W rozdziale "Wartości p_n dla początkowych D" można prześledzić te związki na większej liczbie D.

— dotyczy przypadków kiedy $p_n = 0$.

Jak łatwo sprawdzić dla D podlegających pod RGI do RGVIII zawsze $p_0 = 0$, a dla RGIX do RGXI zawsze $p_1 = 0$. Traktujemy to jak ciekawostkę, bo do obliczenia y w tych przypadkach znajomość p_n nie jest nam potrzebna.
Przykłady:

RGI	gr "+1"	$D = 24 = 5^2-1$	$p_0 = 0$	$D = 63 = 8^2-1$	$p_0 = 0$
RGII	gr "−1"	$D = 26 = 5^2+1$	$p_0 = 0$	$D = 65 = 8^2+1$	$p_0 = 0$
RGIII	gr "+2"	$D = 23 = 5^2-2$	$p_0 = 0$	$D = 62 = 8^2-2$	$p_0 = 0$
RGIV	gr "−2"	$D = 27 = 5^2+2$	$p_0 = 0$	$D = 66 = 8^2-2$	$p_0 = 0$
RGV	gr "+4"	$D = 32 = (2\cdot3)^2-4$	$p_0 = 0$	$D = 60 = (2\cdot4)^2-4$	$p_0 = 0$
RGVI	gr "−4"	$D = 40 = (2\cdot3)^2+4$	$p_0 = 0$	$D = 68 = (2\cdot4)^2+4$	$p_0 = 0$
RGVII	gr "+4"	$D = 21 = (2\cdot2+1)^2-4$	$p_0 = 0$	$D = 77 = (2\cdot4+1)^2-4$	$p_0 = 0$
RGVIII	gr "±4−1"	$D = 29 = (2\cdot2+1)^2+4$	$p_0 = 0$	$D = 85 = (2\cdot4+1)^2+4$	$p_0 = 0$

RGIX	$D = 220 = 15^2 - \frac{15}{3}$	$p_1 = 0$
RGIX	$D = 230 = 15^2 + \frac{15}{3}$	$p_1 = 0$
RGX	$D = 215 = 15^2 - \frac{2\cdot15}{3}$	$p_1 = 0$
RGX	$D = 235 = 15^2 + \frac{2\cdot15}{3}$	$p_1 = 0$
RGXI	$D = 205 = 15^2 - \frac{4\cdot15}{3}$	$p_1 = 0$
RGXI	$D = 245 = 15^2 + \frac{4\cdot15}{3}$	$p_1 = 0$

Z przypadkiem $p_n = 0$ mamy też do czynienia kiedy D da się przedstawić w postaci:

$D = t^2 \pm \frac{4t^2}{n}$ $\left(\frac{t^2}{n} \text{ i } \frac{2t^2}{n} \text{ pomijamy, bo nie wpływają na wartość } a \text{ tylko } n\right)$ to n nie ma nic wspólnego z p_n

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z D, które można tak przedstawić. Zachodzą tu dwa przypadki:
- D mieści się pomiędzy $t^2 \pm t$ i łatwo jest sprawdzić, że taki właśnie przypadek zachodzi. ($D = 30^2 \pm 9{,}18{,}25$)
- D nie mieści się pomiędzy $t^2 \pm t$ ($D = 30^2 \pm 36{,}45{,}48{,}50.....$). $D = 30^2 \pm 40$ to RGXI.

Rozpatrzmy pierwszy z tych przypadków. Znamy t, $a = \frac{4t^2}{n}$ i wiemy, że dla tego D jakieś $p_n = 0$.
Poprzednio rozwiązując PS znajdowaliśmy p_n (tzn. wartość p i n) i wiedzieliśmy od którego równania rozpocząć rozwiązywanie. W tym przypadku wiemy, że $p_n = 0$, ale nie znamy wartości n.
Możemy teraz, począwszy od $p_0 = 0$, próbować znaleźć właściwe p_n metodą prób korzystając z odpowiednich równań lub skorzystać z programu na stronie 100. Wpisujemy wartości t, a, $p = 0$ i zmieniając n (począwszy od zera) znajdujemy $p_n = 0$, co jest równoznaczne z rozwiązaniem tego RP.
Interesujące jest przyjrzenie się wartościom p_{n+1} i p_{n-1} jeśli $p_n = 0$. Popatrzmy:

"+1"	$D = 216 = 15^2 - 9 = 15^2 - \frac{15^2}{25}$	$p_1 = 3$	$p_2 = 0$	$p_3 = -27$
"+1"	$D = 234 = 15^2 + 9 = 15^2 + \frac{15^2}{25}$	$p_2 = 9$	$p_3 = 0$	$p_4 = 81$
"+1"	$D = 891 = 30^2 - 9 = 30^2 - \frac{30^2}{50}$	$p_1 = 3$	$p_2 = 0$	$p_3 = -27$
"+1"	$D = 909 = 30^2 + 9 = 30^2 + \frac{30^2}{50}$	$p_2 = 9$	$p_3 = 0$	$p_4 = 81$

”+1” $D = 882 = 30^2 - 18 = 30^2 - \frac{30^2}{50}$ $p_2 = 18$ $p_3 = 0$ $p_4 = -324$

”−2” $D = 918 = 30^2 + 18 = 30^2 + \frac{30^2}{50}$ $p_1 = 6$ $p_2 = 0$ $p_3 = 108$

”+4” $D = 876 = 30^2 - 24 = 30^2 - \frac{2 \cdot 30^2}{75}$ $p_0 = 2$ $p_1 = 0$ $p_2 = 48$

”+4” $D = 924 = 30^2 + 24 = 30^2 + \frac{2 \cdot 30^2}{75}$ $p_0 = 2$ $p_1 = 0$ $p_2 = 48$

Jak widać z tych kilku przykładów p_{n+1} i p_{n-1} przyjmują wartości $\sqrt{a}$, a, $2a$, a^2 lub podzielników a. Dlatego rozwiązywanie takich RP warto zaczynać od sprawdzenia tej własności. Widać też, że $p_n = 0$ zachodzi przy stosunkowo niskich wartościach n.

Drugi przypadek. Przykłady:

”+1” $D = 825 = 30^2 - 75 = 30^2 - \frac{30^2}{12}$ $p_4 = 5625 = 75^2$ $p_5 = 0$ $p_6 = 421875 = 75^3$

”+1” $D = 975 = 30^2 + 75 = 30^2 + \frac{30^2}{12}$ $p_2 = 75$ $p_3 = 0$ $p_4 = 5675 = 75^2$

”+1” $D = 750 = 30^2 + 150 = 30^2 + \frac{30^2}{6}$ $p_8 = 506250000 = 150^4$ $p_9 = 0$ $p_{10} = -75937500000 = 150^5$

”+1” $D = 1050 = 30^2 - 150 = 30^2 - \frac{30^2}{6}$ $p_4 = 22500 = 150^2$ $p_5 = 0$ $p_6 = 3375000 = 150^3$

”+1” $D = 660 = 30^2 - 240 = 30^2 - \frac{4 \cdot 30^2}{15}$ $p_4 = 576000 = 240^2$ $p_5 = 0$ $p_6 = -13824000 = -240^3$

”+1” $D = 1140 = 30^2 + 240 = 30^2 + \frac{4 \cdot 30^2}{15}$ $p_4 = 576000 = 240^2$ $p_5 = 0$ $p_6 = 13824000 = 240^3$

”+1” $D = 540 = 30^2 - 360 = 30^2 - \frac{2 \cdot 30^2}{5}$ $p_4 = 259200 = 2 \cdot 360^2$ $p_5 = 0$ $p_6 = -93312000 = 2 \cdot 360^3$

”+1” $D = 1260 = 30^2 + 360 = 30^2 + \frac{2 \cdot 30^2}{5}$ $p_2 = 360$ $p_3 = 0$ $p_4 = 360^2$

Tu też widać prawidłowości, których nie będziemy szerzej omawiać. Warto o tym wiedzieć. Oprócz tego we wszystkich omawianych tu przypadkach mamy do czynienia z liczbami postaci $D_1 k^2$ i warto próbować je rozwiązać jak w PS6.

Jeszcze jedna uwaga do PS8, którą dobrze ilustruje przykład dla $D = 500$.

”−4” $D = 500 = 22^2 + 16 = 22^2 + \frac{4 \cdot 22^2}{121}$ $p_1 = 8$ $p_2 = 0$ $p_3 = 128$

”−4” $D = 500 = 10^2 + 400 = 10^2 + \frac{4 \cdot 10^2}{1}$ $p_{13} = 40 \cdot 400^6$ $p_{14} = 0$ $p_{15} = 40 \cdot 400^7$

Można przypuszczać, że dla D takiej postaci im większe t tym mniejsze p_n.

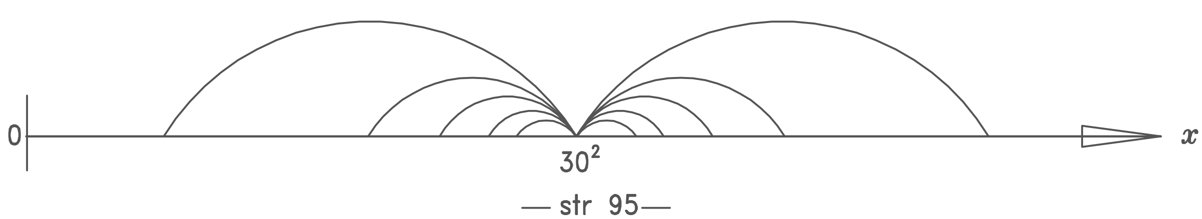
Przy omawianiu RG wspomnieliśmy (strona 24), że im bardziej złożoną liczbą jest t tym więcej $D = t^2 \pm a$ potrafimy rozwiązać korzystając z RGIX do RGXI. Teraz biorąc dla przykładu

$$D = 30^2 \pm 1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,30,40,60$$

możemy rozszerzyć tą listę o nowe a.

$$D = 30^2 \pm 9,16,18,25,36,45,48,50,72,75,80,90,100,120,150,180,$$
$$200,240,300,360,450,600,720,900,1200,1800,3600$$

Na osi liczbowej można sobie wyobrazić niby deszcz spadajacych na oś x wartości D dla których często łatwo znaleźć rozwiązanie. I tak dla każdego kolejnego złożonego t.



Nasuwa się pytanie jak sprawdzić czy dane D można przedstawic w postaci $t^2 \pm \frac{4t^2}{n}$. Pierwszy warunek to D musi być postaci $D_1 k^2$, ale nie jest to warunek wystarczający.

$$1050 = 5^2 \cdot 42 = 32^2 + 26 = 33^2 - 39$$

Chcemy znaleźć t i α takie, że będzie $1050 = t^2 \pm \frac{1,2,4t^2}{n}$ $\quad (\alpha = \frac{1,2,4t^2}{n})$

$$\sqrt{1050} = 32.04...$$

Najbliższym do 32.04.. całkowitym t podzielnym przez 5 (5 to nasze k) jest 30.

$$1050 = 30^2 + \frac{4 \cdot 30^2}{n} \longrightarrow n = 24$$

$$1050 = 30^2 + 150 \qquad p_4 = 22500 \quad p_5 = 0 \quad p_6 = 3375000$$

Już $\frac{30^2}{6} = 150$, ale jak wspomnieliśmy to nie zmienia wartości α.

Inny przykład:

$$504 = 6^2 \cdot 14 = 22^2 + 20 = 23^2 - 25$$

$\sqrt{504} = 22.44..$ $\qquad$ 24 to najbliższe t podzielne przez 6

$$504 = 24^2 - \frac{4 \cdot 24^2}{n} \longrightarrow n = 32 \quad (\text{"}-\text{", bo } 24^2 > 504)$$

$$504 = 24^2 - 72 \qquad p_2 = 72 \quad p_3 = 0 \quad p_4 = -5184$$

Dla D = 549 mamy

$$549 = 3^2 \cdot 61 = 23^2 + 20 = 24^2 - 27$$

$$\sqrt{549} = 23.43.. \longrightarrow t = 24$$

$$549 = 24^2 - \frac{4 \cdot 24^2}{n} \longrightarrow n = 85.33..$$

Tego D nie potrafimy przedstawić w postaci $t^2 \pm \frac{4t^2}{n}$.

Wykonanie większej ilości podobnych obliczeń, pozwala stwierdzić, że $D = D_1 k^2$ daje przedstawić się w postaci $t^2 \pm \frac{4t^2}{n}$ tylko wtedy gdy D_1 podlega pod RG. Wygląda to tak jak gdyby $p_0 = 0$ lub $p_1 = 0$ (dla D_1) zostały przesunięte w górę. Jeżeli już mowa o przypadkach kiedy $p_n = 0$ warto przypatrzeć się rozwiązaniom większym od najmniejszego i tym wartościom.

$1 + 3 \cdot 1^2 = 2^2$	$y = 1$	$p_0 = 0$	$p_1 = -1$
$1 + 3 \cdot 4^2 = 7^2$	$p_0 = 1$	$p_1 = 0$	$p_2 = -1$
$1 + 3 \cdot 15^2 = 26^2$	$p_1 = 1$	$p_2 = 0$	$p_3 = -1$
$1 + 3 \cdot 56^2 = 97^2$	$p_2 = 1$	$p_3 = 0$	$p_4 = -1$
$1 + 300 \cdot 78^2 = 1351^2$	$p_2 = 24^1$	$p_3 = 0$	$p_4 = -24^2$
$1 + 300 \cdot 210756^2 = 3650401^2$	$p_6 = 24^3$	$p_7 = 0$	$p_8 = -24^4$
$1 + 300 \cdot 569462634^2 = 9863382151^2$	$p_{10} = 24^5$	$p_{11} = 0$	$p_{12} = -24^6$
$1 + 300 \cdot 1538687826312 = 26650854921601^2$	$p_{14} = 24^7$	$p_{15} = 0$	$p_{16} = -24^8$

Widoczne są różnego rodzaju zależności, ale ich opisanie przekracza ramy tego opracowania.

— nietypowe przypadki rozwiązania RP.

D = 139 $\qquad 139 = 12^2 - 5 \qquad t = 12 \quad a = 5$ $\quad$ znak "−" $\quad$ grupa "−2"

$139 = 11^2 + 18$

$139 = 11^2 + 2\cdot 3^2$

$139\cdot 2 = 278 = 17^2 - 11$

$278 = 17^2 - 11$

$278 = 2\cdot 11^2 + 6^2$

$-2\cdot 11^2 + 278\cdot 1^2 = 6^2 \longrightarrow t = 17 \quad a = 11$ $\quad$ znak "−" $\quad$ grupa "−2"

$p_1 = 1 \quad n = 0$

(8) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a^1 - p_1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 2\cdot 17\cdot 1\,p_0 - (2\cdot 11^1 - 1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 34p_0 - 21 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{2080}$

(11) $ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a^1 + p_1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 2\cdot 17\cdot 1\,p_0 + (2\cdot 11^1 + 1^2) = 0 \longrightarrow 11p_0^2 - 34p_0 + 23 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 12$

$p_0 = \frac{34+12}{22} = \frac{36}{22}$ odpada $\qquad p_0 = \frac{34-12}{22} = 1$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 17\cdot 1 - 1}{11} = 3$

$-2 + 278\cdot 3^2 = 50^2 \,/ :2$

$-1 + 139\cdot 3^2 = 2\cdot 25^2$

$-2\cdot 25^2 + 139\cdot 3^2 = 1^2$

$-2\cdot 5^4 + 139\cdot 3^2 = 1^2 \longrightarrow t = 12 \quad a = 5$ $\quad$ znak "−" $\quad$ grupa "−2"

$p_3 = 3 \quad n = 2$

(8) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 - (2a^3 - p_3^2) = 0 \longrightarrow 5p_2^2 - 2\cdot 12\cdot 3\,p_2 - (2\cdot 5^3 - 3^2) = 0 \longrightarrow 5p_2^2 - 72p_2 - 241 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = \sqrt{10004}$

(11) $ap_2^2 - 2tp_3p_2 + (2a^3 + p_3^2) = 0 \longrightarrow 5p_2^2 - 2\cdot 12\cdot 3\,p_2 + (2\cdot 5^3 + 3^2) = 0 \longrightarrow 5p_2^2 - 72p_2 + 259 = 0 \quad \sqrt{\triangle} = 2$

$p_2 = \frac{72+2}{10} = \frac{74}{10}$ odpada $\qquad p_2 = \frac{72-2}{10} = 7$

$p_1 = \frac{2tp_2 - p_3}{a} = \frac{2\cdot 12\cdot 7 - 3}{5} = 33$

$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} = \frac{2\cdot 12\cdot 33 - 7}{5} = 157$

$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2\cdot 12\cdot 157 - 33}{5} = 747$

$139\cdot 747^2 = 8807^2 + 2 \longrightarrow$ RGIV $\longrightarrow t = 8807 \quad v_1 = 8807$

$y = v_1\cdot v_2 = 8807\cdot 747 = 6578829$

$1 + 139\cdot 6578829^2 = 77563250^2$

Korzystając z PS4 i zależności $-2\cdot 5^2 + 139\cdot 3^2 = 1^2$ można to RP rozwiązać łatwiej i szybciej. Tu pokazano sposób rozwiązania, który trudno ująć w jakieś normy, ale jest skuteczny.

D = 1181 $\qquad 1181 = 34^2 + 25 \longrightarrow t = 34 \quad a = 25$ $\quad$ znak "+" $\quad$ grupa "±4−1"

$1181 = 4\cdot 17^2 + 5^2 \qquad 1181 = 35^2 - 44$

$1181\cdot 2^2 = 4724 = 69^2 - 37 = 68^2 + 100$

$1181\cdot 3^2 = 10629 = 103^2 + 20 = 104^2 - 187$

$103^2 + 20 - 1181\cdot 3^2 = 0 \,/\triangle$

$20^2 + 1181\cdot 4\cdot 3^2\cdot 103^2 = 21238^2 \,/ :4$

$4\cdot 25 + 1181\cdot 309^2 = 10619^2 \longrightarrow p_0 = 309 \qquad n = -1$

1 $av_2^2 - 2tp_0v_2 + (4\alpha^0 - p_0^2) = 0$

6 $av_2^2 - 2tp_0v_2 - (4\alpha^0 + p_0^2) = 0$

1 $25\,v_2^2 - 2\cdot 34\cdot 309\,v_2 + (4 - 309^2) = 0$

6 $25\,v_2^2 - 2\cdot 34\cdot 309\,v_2 - (4 + 309^2) = 0$

1 $25\,v_2^2 - 21012v_2 - 95477 = 0 \longrightarrow \sqrt{\triangle} = \sqrt{451051844}$

6 $25\,v_2^2 - 21012v_2 - 95485 = 0 \longrightarrow \sqrt{\triangle} = 21238 \longrightarrow v_2 = 845$

$1181\cdot 845^2 = 29039 + 4 \longrightarrow$ RGVIII $\longrightarrow t_1 = 14519$

$v_1 = 4\,(2\cdot 14519 + 1)(14519^2 + 14519 + 1)(2\cdot 14519^2 + 2\cdot 14519 + 1) = 1032472017442422340079 6$

$y = v_1\cdot v_2 = 10324720174424223400796\cdot 845 = 8724388547388468773672620$

$1 + 1181\cdot 8724388547388468773672620^2 = 299819549856198391714823049^2$

mnożąc D przez 3^2 trafiliśmy na nowe D w którym α miało taki sam nieparzysty podzielnik jak w oryginalnym D ($1181 = 34^2 + 25$, $\;1181\cdot 3^2 = 103^2 + 20$) i to wystarczyło, żeby po prostych przekształceniach znaleźć rozwiązanie.

W opracowaniach dotyczących równania Pella dosyć często spotyka się jako przykład do rozwiązania D = 661. Rozwiązemy go jedną z poznanych metod.

D = 661 $\qquad 661 = 26^2 - 15 \longrightarrow t = 26 \quad \alpha = 15$ znak "–" grupa "±4–1"

$661 = 25^2 + 36$

znajdujemy $\qquad 661\cdot 2^2 - 3^5 = 49^2$ PS4

$-\,3^5 + 661\cdot 2^2 = 49^2 / \triangle$

$3^{10} + 661\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 49^2 = 5045^2$

$9^5 + 661\cdot 196^2 = 5045^2 / 4^5\cdot 4$

$4\cdot 36^5 + 661\cdot 12544^2 = 322880^2 \longrightarrow t = 25 \quad \alpha = 36$ znak "+" grupa "±4–1"

$p_4 = 12544 \quad n = 3$

1 $ap_3^2 - 2tp_4p_3 + (4\alpha^4 - p_4^2) = 0 \longrightarrow 36p_3^2 - 2\cdot 25\cdot 12544p_3 + (4\cdot 36^4 - 12544^2) = 0 \longrightarrow 36p_3^2 - 627200\,p_3 - 150633472 = 0$

6 $ap_3^2 - 2tp_4p_3 - (4\alpha^4 + p_4^2) = 0 \longrightarrow 36p_3^2 - 2\cdot 25\cdot 12544p_3 - (4\cdot 36^4 + 12544^2) = 0 \longrightarrow 36p_3^2 - 627200\,p_3 - 164070400 = 0$

1 $\sqrt{\triangle} = \sqrt{415071059968}$

6 $\sqrt{\triangle} = 645760$

$p_3 = \dfrac{627200 + 645760}{72} = 17680 \qquad\qquad p_3 = \dfrac{627200 - 645760}{72} = -\dfrac{18560}{72}$ odpada

$p_2 = \dfrac{2tp_3 + p_4}{\alpha} = \dfrac{2\cdot 25\cdot 17680 + 12544}{36} = 24904$

$p_1 = \dfrac{2tp_2 + p_3}{\alpha} = \dfrac{2\cdot 25\cdot 24904 + 17680}{36} = 35080$

$p_0 = \dfrac{2tp_1 + p_2}{\alpha} = \dfrac{2\cdot 25\cdot 35080 + 24904}{36} = 49414$

$v_2 = \dfrac{2tp_0 + p_1}{\alpha} = \dfrac{2\cdot 25\cdot 49414 + 35080}{36} = 69605$

$661\cdot 69605^2 = 1789539^2 + 4 \longrightarrow$ RGVIII $\longrightarrow t = 1789539 \qquad t_1 = 894469$

$v_1 = 4(2\cdot 894469 + 1)(894469^2 + 894469 + 1)(2\cdot 894469^2 + 2\cdot 894469 + 1) =$

$= 9176474076818473690780707815796$

$y = v_1\cdot v_2 = 9176474076818473690780707815796\cdot 69605 =$

$= 638728478116949861246791167518480580$

$1 + 661\cdot 638728478116949861246791167518480580^2 =$

$= 16421658242965910275055840472270471049^2$

Podsumowanie

To krótki opis wszystkich opisanych w tym rozdziale prób rozwiązania równania Pella.

PS1 – sprawdzamy czy jednym ze składników rozkładu jest liczba a w potędze drugiej lub wyższej,

PS2 – jeżeli to możliwe dzielimy D przez 4-ry i postępujemy z nowym D jak w PS1. Znajdujemy rozwiazanie dla nowego D (jeżeli to możliwe) i wracamy do właściwego D przy pomocy $\triangle$–ty, jeżeli y jest liczba nieparzystą lub wyłączamy 2^2 z y^2, jeżeli y jest liczba parzystą,

PS3 – sprawdzamy czy jeden ze składników rozkładu można uzupełnić do potęgi liczby a i odpowiedniej grupy,

PS4 – mnożymy D kolejno przez 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 otrzymując nowe D, t i a. Na oryginalnym D i nowych D wykonujemy odpowiednie obliczenia sprawdzające,

PS5 – przekształcamy rozkład danego D przy pomocy $\triangle$ –ty i sprawdzamy czy nowe a pozwala na kontynuowanie obliczeń,

PS6 – sprawdzamy czy D jest postaci $D_1 \cdot k^2$ i jeżeli tak, to możemy spróbować rozwiązać RP dla D_1 i sprawdzić czy w y lub x występuje podzielnik k. Takie postępowanie kontynuujemy dla kolejnych rozwiązań D_1, aż do skutku,

PS7 – często występujące wartości p_n,

PS8 – dotyczy przypadków kiedy $p_n = 0$,

PS9 – nietypowe przypadki rozwiązania RP.