

0 wartościach p_n i obliczaniu wartości D o tych samych y i v_2

Przypuśćmy, że znamy rozwiązanie jakiegoś konkretnego D , wiemy do jakiej grupy to D należy, czyli znamy wartości: t, a, y, x, v_1, v_2 . Na stronach 32 do 34 wypisaliśmy równania dla obliczania początkowych wartości p_n . Skorzystamy z nich teraz. Parę przykładów pozwoli lepiej zrozumieć jak "pracuje" RP.

” + ”

” — ”

$$(13) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} - (4a^{n+1} + ap_n^2) = 0$$

$$(19) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} - (4a^{n+1} - ap_n^2) = 0$$

$$(14) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} - (2a^{n+1} + ap_n^2) = 0$$

$$(20) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} - (2a^{n+1} - ap_n^2) = 0$$

$$(15) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} - (a^{n+1} + ap_n^2) = 0$$

$$(21) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} - (a^{n+1} - ap_n^2) = 0$$

$$(16) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} + (a^{n+1} - ap_n^2) = 0$$

$$(22) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} + (a^{n+1} + ap_n^2) = 0$$

$$(17) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} + (2a^{n+1} - ap_n^2) = 0$$

$$(23) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} + (2a^{n+1} + ap_n^2) = 0$$

$$(18) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} + (4a^{n+1} - ap_n^2) = 0$$

$$(24) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} + (4a^{n+1} + ap_n^2) = 0$$

$$(27) \quad p_{n+1} = ap_{n-1} - 2tp_n$$

$$(28) \quad p_{n+1} = 2tp_n - ap_{n-1}$$

Jako pierwsze weźmy $D = 19$. To D należy do grupy "+1" i "-2", znak "+".

Dla grupy "+1"

Dla grupy "-2"

$$1 + 19 \cdot 39^2 = 170^2$$

$$-2 + 19 \cdot 3^2 = 1^2$$

$$t = 4$$

$$t = 4$$

$$a = 3$$

$$a = 3$$

$$y = v_2 = 39$$

$$v_2 = 3$$

$$v_1 = 1$$

$$v_1 = 1$$

Dla grupy "+1" mamy:

$$(15) \quad p_0^2 + 2tv_2 p_0 - (1 + av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 4 \cdot 39 p_0 - (1 + 3 \cdot 39^2) = 0$$

$$p_0 = 14$$

$$p_0 = -326$$

$$(16) \quad p_0^2 + 2tv_2 p_0 + (1 - av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 4 \cdot 39 p_0 + (1 - 3 \cdot 39^2) = 0$$

obliczenie p_1 dla $p_0 = 14$

$$(15) \quad p_1^2 + 2tp_0 p_1 - (a + ap_0^2) = 0 \quad p_1^2 + 2 \cdot 4 \cdot 14 p_1 - (3 + 3 \cdot 14^2) = 0$$

$$(16) \quad p_1^2 + 2tp_0 p_1 + (a - ap_0^2) = 0 \quad p_1^2 + 2 \cdot 4 \cdot 14 p_1 + (3 - 3 \cdot 14^2) = 0$$

$$p_1 = 5$$

$$p_1 = -117$$

obliczenie p_1 dla $p_0 = -326$

$$(15) \quad p_1^2 + 2tp_0 p_1 - (a + ap_0^2) = 0 \quad p_1^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-326) p_1 - [3 + 3(-326)^2] = 0$$

$$(16) \quad p_1^2 + 2tp_0 p_1 + (a - ap_0^2) = 0 \quad p_1^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-326) p_1 + [3 - 3(-326)^2] = 0$$

$$p_1 = 2725$$

$$p_1 = -117$$

obliczenie p_2 dla $p_1 = 5$

$$(15) \quad p_2^2 + 2tp_1 p_2 - (a^2 + ap_1^2) = 0 \quad p_2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 p_2 - (3^2 + 3 \cdot 5^2) = 0$$

$$(16) \quad p_2^2 + 2tp_1 p_2 + (a^2 - ap_1^2) = 0 \quad p_2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 p_2 + (3^2 - 3 \cdot 5^2) = 0$$

$$p_2 = 2$$

$$p_2 = -42$$

obliczenie p_2 dla $p_1 = -117$

$$(15) \quad p_2^2 + 2tp_1 p_2 - (a^2 + ap_1^2) = 0 \quad p_2^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-117) p_2 - [3^2 + 3(-117)^2] = 0$$

$$(16) \quad p_2^2 + 2tp_1 p_2 + (a^2 - ap_1^2) = 0 \quad p_2^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-117) p_2 + [3^2 - 3(-117)^2] = 0$$

$$p_2 = 978$$

$$p_2 = -42$$

obliczenie p_2 dla $p_1 = 2725$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_2^2 + 2tp_1p_2 - (\alpha^2 + \alpha p_1^2) &= 0 & p_2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2725p_2 - (3^2 + 3 \cdot 2725^2) &= 0 & p_2 &= 978 & p_2 &= -22778 \\ (16) \quad p_2^2 + 2tp_1p_2 + (\alpha^2 - \alpha p_1^2) &= 0 & p_2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2725p_2 + (3^2 - 3 \cdot 2725^2) &= 0 \end{aligned}$$

obliczenie p_3 dla $p_2 = 2$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 - (\alpha^3 + \alpha p_2^2) &= 0 & p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2p_3 - (3^3 + 3 \cdot 2^2) &= 0 \\ (16) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 + (\alpha^3 - \alpha p_2^2) &= 0 & p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2p_3 + (3^3 - 3 \cdot 2^2) &= 0 & p_3 &= -1 & p_3 &= -15 \end{aligned}$$

obliczenie p_3 dla $p_2 = -42$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 - (\alpha^3 + \alpha p_2^2) &= 0 & p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-42)p_3 - [3^3 + 3(-42)^2] &= 0 \\ (16) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 + (\alpha^3 - \alpha p_2^2) &= 0 & p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-42)p_3 + [3^3 - 3(-42)^2] &= 0 & p_3 &= 351 & p_3 &= -15 \end{aligned}$$

obliczenie p_3 dla $p_2 = 978$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 - (\alpha^3 + \alpha p_2^2) &= 0 & p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 978p_3 - (3^3 + 3 \cdot 978^2) &= 0 \\ (16) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 + (\alpha^3 - \alpha p_2^2) &= 0 & p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 978p_3 + (3^3 - 3 \cdot 978^2) &= 0 & p_3 &= 351 & p_3 &= -8175 \end{aligned}$$

obliczenie p_3 dla $p_2 = -22778$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 - (\alpha^3 + \alpha p_2^2) &= 0 & p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-22778)p_3 - [3^3 + 3(-22778)^2] &= 0 \\ (16) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 + (\alpha^3 - \alpha p_2^2) &= 0 & p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-22778)p_3 + [3^3 - 3(-22778)^2] &= 0 & p_3 &= 190399 & p_3 &= -8175 \end{aligned}$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = -1$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 - (\alpha^4 + \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-1)p_4 - [3^4 + 3(-1)^2] &= 0 & p_4 &= 14 & p_4 &= -6 \\ (16) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (\alpha^4 - \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-1)p_4 + [3^4 - 3(-1)^2] &= 0 \end{aligned}$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = -15$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 - (\alpha^4 + \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-15)p_4 - [3^4 + 3(-15)^2] &= 0 & p_4 &= 126 & p_4 &= -6 \\ (16) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (\alpha^4 - \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-15)p_4 + [3^4 - 3(-15)^2] &= 0 \end{aligned}$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = 351$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 - (\alpha^4 + \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 351p_4 - (3^4 + 3 \cdot 351^2) &= 0 & p_4 &= 126 & p_4 &= -2934 \\ (16) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (\alpha^4 - \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 351p_4 + (3^4 - 3 \cdot 351^2) &= 0 \end{aligned}$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = -8175$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 - (\alpha^4 + \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-8175)p_4 - [3^4 + 3(-8175)^2] &= 0 & p_4 &= 68334 & p_4 &= -2934 \\ (16) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (\alpha^4 - \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-8175)p_4 + [3^4 - 3(-8175)^2] &= 0 \end{aligned}$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = 190399$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 - (\alpha^4 + \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 190399p_4 - (3^4 + 3 \cdot 190399^2) &= 0 & p_4 &= 68334 & p_4 &= \\ (16) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (\alpha^4 - \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 190399p_4 + (3^4 - 3 \cdot 190399^2) &= 0 & & & &= -1591526 \end{aligned}$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = -3175$

$$\begin{aligned} (15) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 - (\alpha^4 + \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-3175)p_4 - [3^4 + 3(-3175)^2] &= 0 & p_4 &= 68334 & p_4 &= -2934 \\ (16) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (\alpha^4 - \alpha p_3^2) &= 0 & p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-3175)p_4 + [3^4 - 3(-3175)^2] &= 0 \end{aligned}$$

Dla grupy "-2" mamy:

$$(14) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 - (2 + \alpha v_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3p_0 - (2 + 3 \cdot 3^2) = 0$$

$$(17) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 + (2 - \alpha v_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3p_0 + (2 - 3 \cdot 3^2) = 0 \quad p_0 = 1 \quad p_0 = -25$$

W dalszych obliczeniach możemy zaprzestać wypisywania jednocześnie dwóch równań (w tym przypadku (14) i (17)), bo jak widać z poprzedniego przykładu, przy przechodzeniu do kolejnego p zmienia się numer równania, a przyczyna to przestawienie równań w kolumnie 2 (patrz strona 31).

obliczenie p_1 dla $p_0 = 1$

$$(14) \quad p_1^2 + 2tp_0p_1 - (2\alpha + \alpha p_0^2) = 0 \quad p_1^2 + 2 \cdot 4 \cdot 1p_1 - (2 \cdot 3 + 3 \cdot 1^2) = 0 \quad p_1 = 1 \quad p_1 = -9$$

obliczenie p_1 dla $p_0 = -25$

$$(14) \quad p_1^2 + 2tp_0p_1 - (2\alpha + \alpha p_0^2) = 0 \quad p_1^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-25)p_1 - [2 \cdot 3 + 3(-25)^2] = 0 \quad p_1 = 209 \quad p_1 = -9$$

obliczenie p_2 dla $p_1 = 1$

$$(17) \quad p_2^2 + 2tp_1p_2 + (2\alpha^2 - \alpha p_1^2) = 0 \quad p_2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 1p_2 + (2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 1^2) = 0 \quad p_2 = -3 \quad p_2 = -5$$

obliczenie p_2 dla $p_1 = -9$

$$(17) \quad p_2^2 + 2tp_1p_2 + (2\alpha^2 - \alpha p_1^2) = 0 \quad p_2^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-9)p_2 + [2 \cdot 3^2 - 3(-9)^2] = 0 \quad p_2 = 75 \quad p_2 = -3$$

obliczenie p_2 dla $p_1 = 209$

$$(17) \quad p_2^2 + 2tp_1p_2 + (2\alpha^2 - \alpha p_1^2) = 0 \quad p_2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 209p_2 + (3^2 - 3 \cdot 209^2) = 0 \quad p_2 = 75 \quad p_2 = -1747$$

obliczenie p_3 dla $p_2 = -3$

$$(14) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 - (2\alpha^3 + \alpha p_2^2) = 0 \quad p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-3)p_3 - [2 \cdot 3^3 + 3(-3)^2] = 0 \quad p_3 = 27 \quad p_3 = -3$$

obliczenie p_3 dla $p_2 = -5$

$$(14) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 - (2\alpha^3 + \alpha p_2^2) = 0 \quad p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-5)p_3 - [2 \cdot 3^3 + 3(-5)^2] = 0 \quad p_3 = 43 \quad p_3 = -3$$

obliczenie p_3 dla $p_2 = 75$

$$(14) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 - (2\alpha^3 + \alpha p_2^2) = 0 \quad p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot 75p_3 - (2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 75^2) = 0 \quad p_3 = 27 \quad p_3 = -627$$

obliczenie p_3 dla $p_2 = -1747$

$$(14) \quad p_3^2 + 2tp_2p_3 - (2\alpha^3 + \alpha p_2^2) = 0 \quad p_3^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-1747)p_3 - [2 \cdot 3^3 + 3(-1747)^2] = 0 \quad p_3 = 14603 \quad p_3 = -627$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = 27$

$$(17) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (2\alpha^4 - \alpha p_3^2) = 0 \quad p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 27p_4 + (2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 27^2) = 0 \quad p_4 = 9 \quad p_4 = -225$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = -3$

$$(17) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (2\alpha^4 - \alpha p_3^2) = 0 \quad p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-3)p_4 + [2 \cdot 3^4 - 3(-3)^2] = 0 \quad p_4 = 15 \quad p_4 = 9$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = 43$

$$(17) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (2\alpha^4 - \alpha p_3^2) = 0 \quad p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 43p_4 + (2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 43^2) = 0 \quad p_4 = 15 \quad p_4 = -359$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = -627$

$$(17) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (2\alpha^4 - \alpha p_3^2) = 0 \quad p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-627)p_4 + [2 \cdot 3^4 - 3(-627)^2] = 0 \quad p_4 = 5241 \quad p_4 = -225$$

obliczenie p_4 dla $p_3 = 14603$

$$(17) \quad p_4^2 + 2tp_3p_4 + (2\alpha^4 - \alpha p_3^2) = 0 \quad p_4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 14603p_4 + (2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 14603^2) = 0 \quad p_4 = 5241 \quad p_4 = -122065$$

Przedstawimy teraz otrzymane wyniki w bardziej przejrzystej formie.

$$19 = 10^2 - 9^2 = 10^2 - 3^4$$
$$19 = 4^2 + 3$$

$$\begin{array}{ccccccccc} y=v_2 & v_1=1 & & & & & & & \\ +a^0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & & & \\ & -a^1 & +a^2 & -a^3 & +a^4 & -a^5 & a=3 & & \end{array}$$

$$19 = 4^2 + 3$$

 $\alpha = 3$

Każda z wartości $y, v_2, p_0, p_1, p_2, \dots$ to tak jak gdyby "szczebel" w niekończącej się drabinie tych wielkości. Począwszy od szczebla p_1 rozwiązania możemy podzielić na "czerwone" i "zielone". Rozwiązania "zielone" powstają przez pomnożenie przez a (w naszym przypadku przez 3) odpowiednich rozwiązań "czerwonych" lub "zielonych". Przez określenie "odpowiednich" rozumiemy rozwiązania o dwa szczeble niższe (co wyjaśnia dlaczego wartości y, v_2, p_0 są "czerwone"). Z czego wynika, że wszystkie rozwiązania "zielone" to rozwiązania wtórne. Od strony formalnej polega to na tym, że możliwe są przekształcenia ORP jak niżej:

$$\pm 1, 2, 4a^n + Dp_{n-1}^2 = m^2 / \cdot a^2$$

$$\pm 1, 2, 4a^{n+2} + D(p_{n-1}a)^2 = (ma)^2 \quad p_{n-1}a = p_{n+1}$$

Do rozwiązań "zielonych" jeszcze wrócimy, a na razie wyjaśnimy jak w prosty sposób otrzymywać rozwiązania "czerwone". Sposób otrzymywania wartości $p_0, p_1, p_2, \dots$ jaki zademonstrowaliśmy dla $D=19$ jest bardzo pracochłonny. Każde przejście do kolejnego p wymaga rozwiązania dwa razy większej liczby równań kwadratowych i mimo powtarzania się niektórych rozwiązań jest to procedura bardzo uciążliwa, a jej rezultat to duża ilość rozwiązań "zielonych" nie wnoszących nic nowego do tego co już wiadomo.

Omówimy teraz jak otrzymywać tylko wartości "czerwone". Dla przypomnienia każde D należy do grupy "+1" tzn. dla każdego D rozwiązaniem jest równanie

$$+1 + Dy^2 = x^2$$

a oprócz tego może, ale nie musi należeć do którejś z grup $-1, \pm 2, \pm 4, \pm 4-1$, gdzie równania wyglądają jak niżej:

$$-1 + Dv_2^2 = m^2$$

$$\pm 2 + Dv_2^2 = m^2$$

$$\pm 4 + Dv_2^2 = m^2$$

Jezeli D należy tylko do grupy "+1" to $y = v_2$ i znając wartość y możemy z odpowiedniego równania kwadratowego obliczyć dwie wartości p_0 , 4-ry wartości p_1 itd..., ale tak postępując będziemy otrzymywali wartości "czerwone" i "zielone". Jezeli chcemy otrzymywać tylko wartości "czerwone" to z obliczonych dwóch wartości p_0 wybieramy tą o mniejszej wartości bezwzględnej i obliczamy kolejne p używając wzorów poniżej (od znaku przy a zależy który).

" + "

(27)

$$p_1 = ay_2 - 2tp_0$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4$$

" - "

(28)

$$p_1 = 2tp_0 - ay_2$$

$$p_2 = 2tp_1 - ap_0$$

$$p_3 = 2tp_2 - ap_1$$

$$p_4 = 2tp_3 - ap_2$$

$$p_5 = 2tp_4 - ap_3$$

Otrzymane w ten sposób wartości to najmniejsze dla danego D wartości "czerwone". Dla przykładu dla $D=19$ to te leżące w dolnej części. Następnie bierzemy drugą (większą) wartość p_0 i postępując podobnie otrzymujemy największe możliwe rozwiązania "czerwone". Cały czas używamy wartości t i a takich gdzie $t > a$. Jezeli D należy tylko do grupy "+1" to jest to koniec postępowania.

Jezeli D należy do grupy "+1" i którejś z pozostałych to wtedy znając v_2 z odpowiedniego równania kwadratowego obliczamy dwie wartości p_0 i postępujemy z nimi podobnie.

Dla już omówionego przypadku $D=19$ mielibyśmy:

Dla grupy "+1" $v_2 = y = 39$ $v_1 = 1$ $t = 4$ $a = 3$ znak "+"

$$(15) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 - (1 + av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 4 \cdot 39 p_0 - (1 + 3 \cdot 39^2) = 0 \quad p_0 = 14 \quad p_0 = -326$$

$$(16) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 + (1 - av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 4 \cdot 39 p_0 + (1 - 3 \cdot 39^2) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{79096} \text{ odpada}$$

$$p_0 = 14$$

$$p_0 = -326$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 3 \cdot 39 - 2 \cdot 4 \cdot 14 = 5$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 3 \cdot 39 - 2 \cdot 4 \cdot (-326) = 2725$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 3 \cdot 14 - 2 \cdot 4 \cdot 5 = 2$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 3 \cdot (-326) - 2 \cdot 4 \cdot 2725 = -22778$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = -1$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 3 \cdot 2725 - 2 \cdot 4 \cdot (-22778) = 190399$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot (-1) = 14$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 3 \cdot (-22778) - 2 \cdot 4 \cdot 190399 = -1591526$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \cdot 14 = -115$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 3 \cdot 190399 - 2 \cdot 4 \cdot (-1591526) = 13303405$$

Dla grupy "-2" $v_2 = 3$

$$(14) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 - (2 + av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \quad p_0 - (2 + 3 \cdot 3^2) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{692} \quad \text{odpada}$$

$$(17) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 + (2 - av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \quad p_0 + (2 - 3 \cdot 3^2) = 0 \quad p_0 = 1 \quad p_0 = -25$$

$$p_0 = 1$$

$$p_0 = -25$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 1 = 1$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot (-25) = 209$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1 = -5$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 3 \cdot (-25) - 2 \cdot 4 \cdot 209 = -1747$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot (-5) = 43$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 3 \cdot 209 - 2 \cdot 4 \cdot (-1747) = 14603$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 3 \cdot (-5) - 2 \cdot 4 \cdot 43 = -359$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 3 \cdot (-1747) - 2 \cdot 4 \cdot 14603 = -122065$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 3 \cdot 43 - 2 \cdot 4 \cdot (-359) = 3001$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 3 \cdot 14603 - 2 \cdot 4 \cdot (-122065) = 1020329$$

Rozwiążmy jeszcze dwa przykłady tą skróconą metodą kiedy $D = 74$ i $D = 13$

$$D = 74$$

należy do grupy "+1" i "-1" $t = 9$ $a = 7$ znak "-"

$$1 + 74 \cdot 430^2 = 3699^2$$

Dla grupy "+1"

$$y = v_2 = 430 \quad v_1 = 1$$

$$(21) \quad p_0^2 - 2tv_2p_0 - (1 - av_2^2) = 0 \quad p_0^2 - 2 \cdot 9 \cdot 430p_0 - (1 - 7 \cdot 430^2) = 0 \quad p_0 = 7569 \quad p_0 = 171$$

$$(22) \quad p_0^2 - 2tv_2p_0 + (1 + av_2^2) = 0 \quad p_0^2 - 2 \cdot 9 \cdot 430p_0 + (1 + 7 \cdot 430^2) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{54730396} \quad \text{odpada}$$

$$p_0 = 171$$

$$p_0 = 7569$$

$$p_1 = 2tp_0 - av_2 = 2 \cdot 9 \cdot 171 - 7 \cdot 430 = 68$$

$$p_1 = 2tp_0 - av_2 = 2 \cdot 9 \cdot 7569 - 7 \cdot 430 = 133232$$

$$p_2 = 2tp_1 - ap_0 = 2 \cdot 9 \cdot 68 - 7 \cdot 171 = 27$$

$$p_2 = 2tp_1 - ap_0 = 2 \cdot 9 \cdot 133232 - 7 \cdot 7569 = 2345193$$

$$p_3 = 2tp_2 - ap_1 = 2 \cdot 9 \cdot 27 - 7 \cdot 68 = 10$$

$$p_3 = 2tp_2 - ap_1 = 2 \cdot 9 \cdot 2345193 - 7 \cdot 133232 = 41280850$$

$$p_4 = 2tp_3 - ap_2 = 2 \cdot 9 \cdot 10 - 7 \cdot 27 = -9$$

$$p_4 = 2tp_3 - ap_2 = 2 \cdot 9 \cdot 41280850 - 7 \cdot 2345193 = 726638949$$

$$p_5 = 2tp_4 - ap_3 = 2 \cdot 9 \cdot (-9) - 7 \cdot 10 = -232$$

$$p_5 = 2tp_4 - ap_3 = 2 \cdot 9 \cdot 726638949 - 7 \cdot 41280850 = 12790535132$$

Dla grupy "-1" $v_2 = 5$

$$-1 + 74 \cdot 5^2 = 43^2$$

$$(21) \quad p_0^2 - 2tv_2p_0 - (1 - av_2^2) = 0 \quad p_0^2 - 2 \cdot 9 \cdot 5p_0 - (1 - 7 \cdot 5^2) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{7404} \quad \text{odpada}$$

$$(22) \quad p_0^2 - 2tv_2p_0 + (1 + av_2^2) = 0 \quad p_0^2 - 2 \cdot 9 \cdot 5p_0 + (1 + 7 \cdot 5^2) = 0 \quad p_0 = 88 \quad p_0 = 2$$

$$p_0 = 2$$

$$p_0 = 88$$

$$p_1 = 2tp_0 - av_2 = 2 \cdot 9 \cdot 2 - 7 \cdot 5 = 1$$

$$p_1 = 2tp_0 - av_2 = 2 \cdot 9 \cdot 88 - 7 \cdot 5 = 1549$$

$$p_2 = 2tp_1 - ap_0 = 2 \cdot 9 \cdot 1 - 7 \cdot 2 = 4$$

$$p_2 = 2tp_1 - ap_0 = 2 \cdot 9 \cdot 1549 - 7 \cdot 88 = 27266$$

$$p_3 = 2tp_2 - ap_1 = 2 \cdot 9 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 65$$

$$p_3 = 2tp_2 - ap_1 = 2 \cdot 9 \cdot 27266 - 7 \cdot 1549 = 479945$$

$$p_4 = 2tp_3 - ap_2 = 2 \cdot 9 \cdot 65 - 7 \cdot 4 = 1142$$

$$p_4 = 2tp_3 - ap_2 = 2 \cdot 9 \cdot 479945 - 7 \cdot 27266 = 8448148$$

$$p_5 = 2tp_4 - ap_3 = 2 \cdot 9 \cdot 1142 - 7 \cdot 65 = 20101$$

$$p_5 = 2tp_4 - ap_3 = 2 \cdot 9 \cdot 8448148 - 7 \cdot 479945 = 148707049$$

$$D = 13$$

należy do grupy "+1" i "±4, -1" $t = 3$ $a = 4$ znak "+"

$$1 + 13 \cdot 180^2 = 649^2$$

Jak wspomniano wcześniej liczba 13 to z jednej strony liczba podlegająca pod RGVIII ($13 = 3^2 + 4$) dla której znalezienie rozwiązania jest bardzo łatwe, bez interesowania się do jakiej grupy należy. Z drugiej strony zachowując warunek $t \geq a$ to $4^2 - 3$. W obu przypadkach znając rozwiązanie możemy obliczać kolejne p_n raz dla $t = 3$ i $a = 4$ lub $t = 4$ i $a = 3$. Poniżej przedstawiono obliczenia dla pierwszego przypadku.

Dla grupy "+1"

$$y = v_2 = 180 \quad v_1 = 1$$

$$(15) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 - (1 + av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 3 \cdot 180p_0 - (1 + 4 \cdot 180^2) = 0 \quad p_0 = 109 \quad p_0 = -1189$$

$$(16) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 + (1 - av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 3 \cdot 180p_0 + (1 - 4 \cdot 180^2) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{1684796} \quad \text{odpada}$$

$$p_0 = 109$$

$$p_0 = -1189$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 4 \cdot 180 - 2 \cdot 3 \cdot 109 = 66$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 4 \cdot 180 - 2 \cdot 3 \cdot (-1189) = 7854$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 4 \cdot 109 - 2 \cdot 3 \cdot 66 = 40$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 4 \cdot (-1189) - 2 \cdot 3 \cdot 7854 = -51880$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 4 \cdot 66 - 2 \cdot 3 \cdot 40 = 24$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 4 \cdot 7854 - 2 \cdot 3 \cdot (-51880) = 342696$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 4 \cdot 40 - 2 \cdot 3 \cdot 24 = 16$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 4 \cdot (-51880) - 2 \cdot 3 \cdot 342696 = -2263696$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 4 \cdot 24 - 2 \cdot 3 \cdot 16 = 0$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 4 \cdot 342696 - 2 \cdot 3 \cdot (-2263696) = 14952960$$

Dla grupy "±4,-1"

$$v_2 = 1 \quad (\text{dla "-4"})$$

$$v_2 = 5 \quad (\text{dla "-1"})$$

$$v_2 = 3 \quad (\text{dla "+4"})$$

$$\frac{-4 + 13 \cdot 1^2 = 3^2}{v_2 = 1 \quad (\text{dla "-4"})}$$

$$v_2 = 1 \quad (\text{dla "-4"})$$

$$(13) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 - (4 + av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1p_0 - (4 + 4 \cdot 1^2) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{68} \quad \text{odpada}$$

$$(18) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 + (4 - av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1p_0 + (4 - 4 \cdot 1^2) = 0 \quad p_0 = 0 \quad p_0 = -6$$

$$p_0 = 0$$

$$p_0 = -6$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 0 = 4$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot (-6) = 40$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = -24$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 4 \cdot (-6) - 2 \cdot 3 \cdot 40 = -264$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot (-24) = 160$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 4 \cdot 40 - 2 \cdot 3 \cdot (-264) = 1744$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 4 \cdot (-24) - 2 \cdot 3 \cdot 160 = -1056$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 4 \cdot (-264) - 2 \cdot 3 \cdot 1744 = -11520$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 4 \cdot 160 - 2 \cdot 3 \cdot (-1056) = 6976$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 4 \cdot 1744 - 2 \cdot 3 \cdot (-11520) = 76096$$

$$\frac{-1 + 13 \cdot 5^2 = 18^2}{v_2 = 5 \quad (\text{dla "-1"})}$$

$$v_2 = 5 \quad (\text{dla "-1"})$$

$$(15) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 - (1 + av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5p_0 - (1 + 4 \cdot 5^2) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{1304} \quad \text{odpada}$$

$$(16) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 + (1 - av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5p_0 + (1 - 4 \cdot 5^2) = 0 \quad p_0 = 3 \quad p_0 = -33$$

$$p_0 = 3$$

$$p_0 = -33$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot (-33) = 218$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 = 0$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 4 \cdot (-33) - 2 \cdot 3 \cdot 218 = -1440$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 0 = 8$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 4 \cdot 218 - 2 \cdot 3 \cdot (-1440) = 9512$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 8 = -48$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 4 \cdot (-1440) - 2 \cdot 3 \cdot 9512 = -62832$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 4 \cdot 8 - 2 \cdot 3 \cdot (-48) = 320$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 4 \cdot 9512 - 2 \cdot 3 \cdot (-62832) = 415040$$

$$\frac{+4 + 13 \cdot 3^2 = 11^2}{v_2 = 3 \quad (\text{dla "+4"})}$$

$$v_2 = 3 \quad (\text{dla "+4"})$$

$$(13) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 - (4 + av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3p_0 - (4 + 4 \cdot 3^2) = 0 \quad p_0 = 2 \quad p_0 = -20$$

$$(18) \quad p_0^2 + 2tv_2p_0 + (4 - av_2^2) = 0 \quad p_0^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3p_0 + (4 - 4 \cdot 3^2) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{452} \quad \text{odpada}$$

$$p_0 = 2$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 = 0$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 0 = 8$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 8 = -48$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 4 \cdot 8 - 2 \cdot 3 \cdot (-48) = 320$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 4 \cdot (-48) - 2 \cdot 3 \cdot 320 = -2112$$

$$p_0 = -20$$

$$p_1 = av_2 - 2tp_0 = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot (-20) = 132$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1 = 4 \cdot (-20) - 2 \cdot 3 \cdot 132 = -872$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2 = 4 \cdot 132 - 2 \cdot 3 \cdot (-872) = 5760$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3 = 4 \cdot (-872) - 2 \cdot 3 \cdot 5760 = -38048$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4 = 4 \cdot 5760 - 2 \cdot 3 \cdot (-38048) = 251328$$

Powyższe obliczenia dotyczą tylko wartości "czerwonych". Na kilku kolejnych stronach przedstawiono je w bardziej przejrzystej formie, plus wartości "zielone", które obliczono mnożąc przez a odpowiednie p_n , bez zwracania uwagi na znaki.

$$D = 74 - \text{grupa "+1"} \quad 74 = 7^2 + 5^2$$

$$1 + 74 \cdot 430^2 = 3699^2 \quad y = 430 \quad v_2 = 1 \quad 74 = 9^2 - 7$$

					41280850	726638949	
				2345193		16416351	7×2345193
					7×133232	16416351	7×2345193
					932624	370881	7×52983
	133232				7×133232	16416351	7×2345193
				7×7569	932624	370881	7×52983
				52983			
					7×3010	370881	7×52983
					21070	8379	7×1197
7569							
					7×133232	16416351	7×2345193
				7×7569	932624	370881	7×52983
				52983			
					7 × 3010	370881	7×52983
					21070	8379	7×1197
	7×430						
	3010				7×3010	370881	7×52983
					21070	8379	7×1197
				7×171			
				1197			
					7×68	8379	7×1197
					476	189	7×27
430							
					7×133232	16416351	7×2345193
				7×7569	932624	370881	7×52983
				52983			
					7×3010	370881	7×52983
					21070	8379	7×1197
	7×430						
	3010				7×3010	370881	7×52983
					21070	8379	7×1197
				7×171			
				1197			
					7×68	8379	7×1197
					476	189	7×27
171							
					7×3010	370881	7×52983
					21070	8379	7×1197
				7×171			
				1197			
					7×68	8379	7×1197
					476	189	7×27
				68			
					7×68	8379	7×1197
					476	189	7×27
				27			
					10	189	7×27
						-9	

$$y = v_2 \quad v_1 = 1 \quad p_0 + a^0 \quad p_1 + a^1 \quad p_2 + a^2 \quad p_3 + a^3 \quad p_4 + a^4 \quad p_5 + a^5 \quad a = 7$$

$$74 = 9^2 - 7$$



$$13 = 7^2 - 6^2$$

$$y = 180$$

$$v_2 = 1$$

$$13 = 3^2 + 4$$

[illegible]

$$y = v_2 \quad v_1 = 1$$

$$p_0 - a^1$$

$$p_1 + a^2$$

$$p_2 - a^3$$

$$p_3 + a^4$$

$$p_4 - a^5$$

$$\alpha = 4$$

$$\begin{aligned} 13 &= 7^2 - 6^2 \\ 13 &= 3^2 + 4 \end{aligned}$$

ν_2 $-4\alpha^0$	p_0 $+4\alpha^1$	p_1 $-4\alpha^2$	p_2 $+4\alpha^3$	p_3 $-4\alpha^4$	p_4 $+4\alpha^5$	$\alpha = 4$
				1744	-11520	
			-264	4x40 160	1056	4x264
	40			4x40 160	1056	4x264
			4x6 24	4x40 160	96	4x24
				4x4 16	1056	4x264
				4x4 16	96	4x24
				4x4 16	0	4x0
-6				4x40 160	1056	4x264
			4x6 24	4x40 160	96	4x24
				4x4 16	96	4x24
	4x1 4			4x4 16	96	4x24
			4x0 0	4x4 16	96	4x24
				4x4 16	0	4x0
1				4x4 16	0	4x0
				4x4 16	96	4x24
			4x6 24	4x40 160	1056	4x264
				4x4 16	96	4x24
				4x4 16	96	4x24
				4x4 16	98	4x14
	4x1 4			4x4 16	96	4x24
			4x0 0	4x4 16	0	4x0
				4x4 16	0	4x0
				4x4 16	96	4x24
0				4x4 16	96	4x24
			4x0 0	4x4 16	0	4x0
				4x4 16	0	4x0
				4x4 16	96	4x24
		4		4x4 16	0	4x0
				4x4 16	96	4x24
			-24	4x4 16	0	4x0
				160	96	4x24
					-1056	

$$\begin{aligned} 13 &= 7^2 - 6^2 \\ 13 &= 3^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} v_2 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \\ -\alpha^0 & +\alpha^1 & -\alpha^2 & +\alpha^3 & -\alpha^4 & +\alpha^5 & \alpha=4 \end{array}$$

$$D = 13 - \text{grupa } "+4"$$

$$+4 + 13 \cdot 3^2 = 11^2 \quad v_2 = 3$$

$$13 = 7^2 - 6^2$$

$$13 = 3^2 + 4$$

					5760	-38048
						3488 4x872
					4x132	3488 4x872
					528	320 4x80
	132				4x132	3488 4x3488
					528	320 4x80
		4x20			4x12	320 4x80
		80			48	32 4x8
					4x12	3488 4x872
					48	320 4x80
		4x20			4x12	320 4x80
		80			48	32 4x8
	4x3				4x12	320 4x80
	12				48	32 4x8
		4x2			4x12	320 4x80
		8			48	32 4x8
					4x0	32 4x8
					0	32 4x8
3					4x132	3488 4x872
					528	320 4x80
		4x20			4x12	320 4x80
		80			48	32 4x8
	4x3				4x12	320 4x80
	12				48	32 4x8
		4x2			4x12	320 4x80
		8			48	32 4x8
					4x0	32 4x8
					0	32 4x8
	2				4x12	320 4x80
					48	32 4x8
		4x2			4x0	32 4x8
		8			0	32 4x8
					4x0	32 4x8
					0	32 4x8
	0				4x0	32 4x8
					0	32 4x8
			8			32 4x8
					-48	320

$$v_2$$

$$+4\alpha^0$$

$$p_0$$

$$-4\alpha^1$$

$$p_1$$

$$+4\alpha^2$$

$$p_2$$

$$-4\alpha^3$$

$$p_3$$

$$+4\alpha^4$$

$$p_4$$

$$-4\alpha^5$$

$$\alpha = 4$$

Z przedstawionych na stronach 46, 47 i 52 do 57 wartościach p_n dla $D = 19$, $D = 74$ i $D = 13$ można wyciągnąć wnioski, których trudno byłoby dopatrzeć się przeglądając obliczenia na poprzedzających je stronach. Podzielenie rozwiązań na "czerwone" i "zielone" wiele wyjaśnia. Rozwiązania "czerwone" w dolnym ramieniu to najmniejsze możliwe rozwiązania RP dla $D = t^2 \pm a$. Odpowiednio rozwiązania "czerwone" w górnym ramieniu to największe możliwe rozwiązania. Dla tak przedstawionego D nie stawiamy warunku $t > a$.

Można zauważyć, że "czerwone" wartości p_n w górnych ramionach zawsze rosną. W ramionach dolnych początkowo maleją, by następnie nieograniczenie rosnąć. Co jest prawdą przy zachowaniu pewnych warunków o których teraz powiemy.

Całe te wywody sprowadzają się do stwierdzenia, że kiedy mówimy o najmniejszych, największych czy pośrednich ("zielonych") wartościach p_n to należy dodać, że obliczenia wykonano dla $D = t^2 \pm a$, gdzie t i a wynoszą tyle a tyle. O ile można mówić o najmniejszych p_n dla danego D , to nie ma ograniczeń, jeżeli chodzi o wartości największe (np. $19 = 4^2 + 3$, ale też $19 = 100^2 - 9981$ lub dowolne wyższe t).

Dotychczas chcąc rozwiązać RP przedstawialiśmy D w postaci $t^2 \pm a$ gdzie $t \geq a$ (wyjątkowo dla RGXI dopuszczaliśmy $t < a$). Każde D możemy na nieskończenie wiele sposobów przedstawić w postaci $t^2 \pm a$ nie zachowując warunku $t \geq a$ i zawsze odpowiedzią będzie to samo y i x . Wyprowadzone wcześniej równania rozwiązujące RP zależą między innymi od wartości t i a więc pośrednio wpływają na p_n . Co oznacza, że dla tego samego D , ale różnych t i a wartości p_n będą inne.

Liczba D zawsze leży między t^2 i $(t+1)^2$ i możemy ją przedstawiać jako:

$$t^2 + a \quad \text{lub} \quad (t+1)^2 - a$$

gdzie a są oczywiście różne. Jeżeli w jednym z tych przypadków będzie $t < a$, to w drugim $t > a$, ale a nigdy nie przekroczy wartości $2t$. W obu przypadkach dla tak określonej liczby D zachodzą wyżej wspomniane związki. To znaczy "czerwone" wartości p_n w górnym ramieniu zawsze rosną, a w ramieniu dolnym początkowo maleją, a potem nieograniczenie rosną. Z czego wynika, że przy próbach rozwiązania RP dobrze jest przedstawiać D jako:

$$t^2 + a \quad \text{i} \quad (t+1)^2 - a \quad (a \text{ różne})$$

Tytułem wyjaśnienia, cały czas mówimy o wartościach bezwzględnych. W przypadkach kiedy $a > 2t$ "czerwone" wartości p_n w obu ramionach rosną.

Przykłady

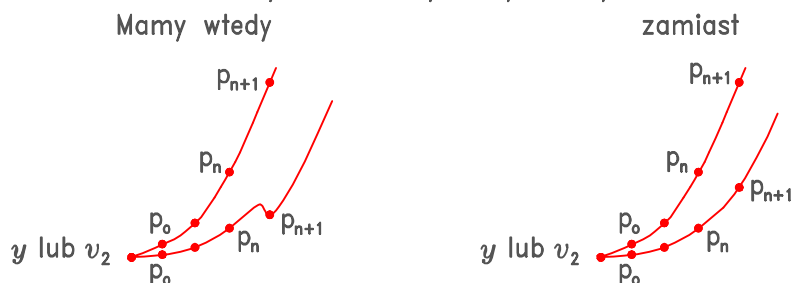
$$\left. \begin{array}{ll} D = 19 = 4^2 + 3 & t > a \\ D = 74 = 9^2 - 7 & t > a \\ D = 13 = 3^2 + 4 & t < a \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{do sprawdzenia na} \\ \text{poprzednich stronach} \end{array} \quad a \leq 2t$$

Przykłady dla $a \geq 2t$

	y	v_2	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
$D = 19 = 6^2 - 17$	39		404	4185	43352	449079	4651964	48189225	499187312
			64	105	172	279	424	345	-3068
	3		31	321	3325	34443	356791	3695961	38286085
			5	9	23	123	1085	10929	112703
$D = 46 = 8^2 - 18$	3588		53039	784040	11589938	171326288	2532601724	37437754400	553417239368
			4369	5320	6478	7888	9604	11680	14008
	23		340	5026	74296	1098268	16234960	239990536	3547619296
			28	34	40	28	-272	-4856	-72800

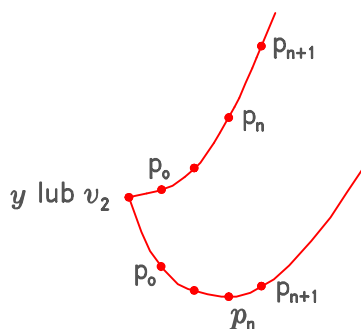
D = 74 = = 7 ² + 25	430	-6709	104676	-1633189	25481546	-397571369	6203037816	-96781813649
		689	1104	1769	2834	4549	7164	13429
	5	-78	1217	-18988	296257	-4622298	72118597	-1125217808
		8	13	18	73	-572	9833	-151962
D = 91 = = 8 ² + 27	165	-2894	50759	-890282	15615005	-273877694	4803648239	-84253069562
		254	391	602	925	1454	1711	11882

W przykładach dla których $a \geq 2t$ niektóre liczby zaznaczyliśmy na czerwono, bo nie spełniają warunku o rosnących wartościach p_n . Takie wyjątki dotyczą tylko przypadków (nie zawsze) w których t jest o 1 mniejsze lub większe od tych t między którymi leży D .



Dla sprawy rozwiązywania RP ważne jest, że w ogóle zachodzi taki przypadek, że dla każdego D wartości p_n początkowo maleją, (nierzadko do wartości $p_n = 0$), często drastycznie, by następnie tylko rosnąć. Znamy warunki dla których to zachodzi ($t > a$), ale najważniejszy jest sam fakt. Wszystkie sposoby znajdowania rozwiązania RP opisane na kolejnych stronach opierają się na tym spostrzeżeniu.

Wygląda to mniej więcej tak:



Szczególnie wyraźnie widać tą własność kiedy D należy do grupy "+1" i jakiejś innej grupy, a najbardziej dla D z grupy $\pm 4-1$ ". Po dwa przykłady z każdej grupy:

$D = 111$	gr. "+1"	$y = 28$	$v_2 = 28$	$p_0 = 13$	$p_1 = 6$	$p_2 = 2$	$p_3 = -16$
$D = 259$	gr. "+1"	$y = 52644$	$v_2 = 52644$	$p_0 = 4921$	$p_1 = 460$	$p_2 = 43$	$p_3 = 4$ $p_4 = 1$ $p_5 = -20$
$D = 265$	gr. "+1"	$y = 4529712$	$v_2 = 4529712$	$p_6 = 601$	$p_7 = -80$	$p_8 = 7969$	
	gr. "-1"	$y = 4529712$	$v_2 = 373$	$p_0 = 104$	$p_1 = 29$	$p_2 = 8$	$p_3 = 5$ $p_4 = -88$
$D = 274$	gr. "+1"	$y = 239190$	$v_2 = 239190$	$p_5 = 1904$	$p_6 = 671$	$p_7 = -5746$	
	gr. "-1"	$y = 239190$	$v_2 = 85$	$p_0 = 38$	$p_1 = 17$	$p_2 = 8$	$p_3 = 17$ $p_4 = 458$
$D = 302$	gr. "+1"	$y = 246092$	$v_2 = 246092$	$p_4 = 1903$	$p_5 = 714$	$p_6 = 463$	$p_7 = -6460$
	gr. "+2"	$y = 246092$	$v_2 = 119$	$p_0 = 45$	$p_1 = 17$	$p_2 = 7$	$p_3 = -17$ $p_4 = 669$
$D = 367$	gr. "+1"	$y = 992835687$	$v_2 = 992835687$	$p_6 = 2360$	$p_7 = 368$	$p_8 = 176$	$p_9 = -4480$
	gr. "+2"	$y = 992835687$	$v_2 = 7199$	$p_0 = 1132$	$p_1 = 178$	$p_2 = 28$	$p_3 = 4$ $p_4 = 16$

D = 278	gr. "+1"	$y = 150$	$v_2 = 150$	$p_0 = 49$	$p_1 = 16$	$p_2 = 5$	$p_3 = -6$	$p_4 = -259$
	gr. "-2"	$y = 150$	$v_2 = 3$	$p_0 = 1$	$p_1 = 1$	$p_2 = 23$		
D = 283	gr. "+1"	$y = 8219541$	$v_2 = 8219541$	$p_5 = 256$	$p_6 = 40$	$p_7 = -176$		
	gr. "-2"	$y = 8219541$	$v_2 = 699$	$p_0 = 124$	$p_1 = 22$	$p_2 = 4$	$p_3 = 4$	$p_4 = 112$
D = 428	gr. "+1"	$y = 89466$	$v_2 = 89466$	$p_4 = 263$	$p_5 = 48$	$p_6 = -1403$		
	gr. "+4"	$y = 89466$	$v_2 = 93$	$p_0 = 29$	$p_1 = 9$	$p_2 = 1$	$p_3 = -75$	
D = 460	gr. "+1"	$y = 118230$	$v_2 = 118230$	$p_4 = 2125$	$p_5 = 924$	$p_6 = 1567$		
	gr. "+4"	$y = 118230$	$v_2 = 105$	$p_0 = 47$	$p_1 = 21$	$p_2 = 11$	$p_3 = -63$	
D = 500	gr. "+1"	$y = 41602$	$v_2 = 41602$	$p_4 = 256$	$p_5 = 0$	$p_6 = 4098$		
	gr. "-4"	$y = 41602$	$v_2 = 61$	$p_0 = 22$	$p_1 = 8$	$p_2 = 0$	$p_3 = 128$	
D = 548	gr. "+1"	$y = 259856$	$v_2 = 259856$	$p_4 = 2989$	$p_5 = 1206$	$p_6 = 1315$		
	gr. "-4"	$y = 259856$	$v_2 = 149$	$p_0 = 61$	$p_1 = 25$	$p_2 = 9$	$p_3 = 61$	
D = 520	gr. "+1"	$y = 285$	$v_2 = 285$	$p_0 = 56$	$p_1 = 11$	$p_2 = 2$	$p_3 = -7$	
	gr. "±4,-1"	$y = 285$	$v_2 = 5$	$p_0 = 1$	$p_1 = 1$	$p_2 = 37$	$p_3 = 1693$	
D = 685	gr. "+1"	$y = 3652413145693884$		duże wartości				
	gr. "±4,-1"	$y = 3652413145693884$		$v_2 = 29$	$p_0 = 5$	$p_1 = 1$	$p_2 = -7$	$p_3 = 373$

Jeszcze inaczej można ten związek przedstawiać jak niżej:

D	grupa "+1" 19	grupa "-2" 19	grupa "+1" 31	grupa "+2" 31	grupa "+1" 57	grupa "+1" 91
y	39	39	273	273	20	165
v_2	39	3	273	7	20	165
p_0	14	1	118	3	9	76
p_1	5	-5	51	1	4	35
p_2	2	43	22	-3	1	16
p_3	-1	-359	9	-41	-12	5
p_4	14	3001	-2	-477	-199	-44
p_5	-115	-25085	-69	-5519	-3100	-925

Swoją drogą trudno oprzeć się wrażeniu, że np. $D = 19 = 4^2 + 3 = 3^2 + 10 = 6^2 - 17 = 1^2 + 18 \dots$ to dla RP niekoniecznie te same liczby.

Znając wartości "czerwone" możemy przejść do wartości "zielonych" według schematu jak niżej:

$$y \cdot a = p_1 \quad \text{lub} \quad v_2 \cdot a = p_1$$

$$p_0 \cdot a = p_2$$

$$\left. \begin{matrix} p_1 \\ p_1 \end{matrix} \right\} \cdot a = p_3$$

$$\left. \begin{matrix} p_2 \\ p_2 \end{matrix} \right\} \cdot a = p_4$$

$$\left. \begin{matrix} p_3 \\ p_3 \end{matrix} \right\} \cdot a = p_5$$

.

Z czego wynika, że "zielone" p_1, p_2 dzielą się przez a , kolejne p_3, p_4 przez a^2 itd... co pozwala na znalezienie "czerwonej" wartości p_n (a następnie y, v_2) jeżeli wcześniej znamy jakies "zielone" p_n .

Jeszcze jedną interesującą własność RP można zauważyć przypatrując się wartościom y i v_2 . W tym rozdziale mówiliśmy o wartościach p_n , ale najbardziej interesują nas wartości v_2 i y (to też ponieważ wartości p_n tylko inaczej zapisane, v_2 to p_{-1} a y to p_{-2}). Wyprzedzając to co chcemy opisać, jeśli dla jakiegoś D rozwiązaniem jest y , to to samo y jest równocześnie rozwiązaniem dla nieskończenie wielu innych D należących do tej samej grupy. Dotyczy to także wartości v_2 . Na przykładach pokażemy jak znajdować kolejne D o tym samym y lub v_2 .

Znajdowanie D o tym samym y

<u>D = 19</u>					
$1 + 19 \cdot 39^2 = 170^2$	$19 = 4^2 + 3$	$t = 4$	$a = 3$	$y = 39$	gr. "+1" (i "-2")
$1 + 1880 \cdot 39^2 = 1691^2$	$1880 = 43^2 + 31$	$t = 43$	$a = 31$	$y = 39$	gr. "+1"
$1 + 6783 \cdot 39^2 = 3212^2$	$6783 = 82^2 + 59$	$t = 82$	$a = 59$	$y = 39$	gr. "+1"
$1 + 14728 \cdot 39^2 = 4733^2$	$14728 = 121^2 + 87$	$t = 121$	$a = 87$	$y = 39$	gr. "+1"
.....					

Różnica między kolejnymi t wynosi 39 czyli y , a między kolejnymi a wynosi 28. W przypadku a nie widać przyczyny dla której ta wartość jest taka, a nie inna. Jednak chcąc znaleźć kolejne D o tym samym y należy też obliczyć a dla tego D. Na powiększonej nieco tabelicy (podobnej do tej na stronie 22) można zauważyć, że wyżej wypisane liczby D leżą na jednej prostej, co przy założeniu, że ta prosta przechodzi przez środek "kwadratu" 0 pozwala na napisanie proporcji:

$$\frac{a}{t} = \frac{x}{t + y} \quad \begin{array}{l} x \text{ to } a \text{ dla najbliższego poszukiwanego D} \\ t + v_2 \text{ to } t \text{ dla najbliższego poszukiwanego D} \end{array}$$

Dla $D = 19$ mamy

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{4 + 39} \longrightarrow x = 32.25 \cong 32 \quad \text{to nasze nowe } a$$

Nowe $D = 43^2 + 32 = 1881$

$$1 + 1881 \cdot 39^2 = 1691.449^2.$$

W naszych obliczeniach na pewno poprawna jest wartość nowego t , a korekty wymaga wartość a . Można spodziewać się, że będzie leżeć blisko tej wartości którą obliczyliśmy. Ze względów, które wkrótce opiszemy w tym przypadku trzeba brać coraz mniejsze wartości D (lub a) i sprawdzać czy dają poprawny wynik.

$$1 + 1880 \cdot 39^2 = 1691^2 \quad 1880 = 43^2 + 31 \quad t = 43 \quad a = 31 \quad \text{poprawione}$$

Korekta a wynika z błędnego założenia, że nasza prosta przechodzi przez środek "kwadratu" 0, ale takie założenie jest z konieczności dosyć dobrym przybliżeniem. Mamy więc dwie kolejne wartości D dla których y jest takie samo.

$1 + 19 \cdot 39^2 = 170^2$	$19 = 4^2 + 3$	$t = 4$	$a = 3$
		$+39$	$+28$
$1 + 1880 \cdot 39^2 = 1691^2$	$1880 = 43^2 + 31$	$t = 43$	$a = 31$

Teraz obliczanie kolejnych D o tym samym y jest więcej niż proste.

Proste przechodzące przez odpowiednie punkty (D) o tym samym y mają pewne własności w zależności od tego czy dotyczą górnej lub dolnej części tabeli. Po pierwsze nie ma między nimi symetrii, po drugie proste z górnej części tabeli przecinają wymagowaną oś x na lewo od punktu 0, a z dolnej części na prawo od punktu 0.

To właśnie było powodem, że w tym przykładzie szukaliśmy poprawnej wartości D wśród niższej od obliczonej z proporcji.

Gdybyśmy zaczęli obliczenia od przykładowo

$$1 + 6783 \cdot 39^2 = 3212^2$$

to po znalezieniu kolejnego D moglibyśmy cofać się aż do znalezienia najmniejszego D dla danego y .

$$\underline{D=70}$$

$$1 + 70 \cdot 30^2 = 251^2$$

$$70 = 8^2 + 6$$

$$t = 8$$

$$a = 6$$

$$y = 30 \quad \text{gr. "+1"}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{x}{8 + 30} \longrightarrow x = 28.5 \cong 28$$

$$\text{Nowe } D = 38^2 + 28 = 1472$$

$$1 + 1472 \cdot 30^2 = 1151^2$$

$$1 + 70 \cdot 30^2 = 251^2$$

$$70 = 8^2 + 6$$

$$t = 8$$

$$a = 6$$

$$\text{gr. "+1"}$$

$$+30$$

$$+22$$

$$1 + 1472 \cdot 30^2 = 1151^2$$

$$1472 = 38^2 + 28$$

$$t = 38$$

$$a = 28$$

$$\text{gr. "+1"}$$

$$+30$$

$$+22$$

$$1 + 4674 \cdot 30^2 = 2051^2$$

$$4674 = 68^2 + 50$$

$$t = 68$$

$$a = 50$$

$$\text{gr. "+1"}$$

$$+30$$

$$+22$$

$$1 + 9676 \cdot 30^2 = 2951^2$$

$$9676 = 98^2 + 72$$

$$t = 98$$

$$a = 72$$

$$\text{gr. "+1"}$$

.....

Znajdowanie D o tym samym v_2

$$\underline{D=19}$$

Postępujemy podobnie. Różnica między kolejnymi t to v_2 .

$$1 + 19 \cdot 39^2 = 170^2$$

$$19 = 4^2 + 3$$

$$t = 4$$

$$a = 3$$

$$v_2 = 3 \quad \text{gr. "-2"}$$

$$\frac{a}{t} = \frac{x}{t + v_2}$$

x to a dla najbliższego poszukiwanego D

$t + v_2$ to t dla najbliższego poszukiwanego D

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{4 + 3} \longrightarrow x = 5.25 \cong 5$$

$$\text{Nowe } D = 7^2 + 5 = 54$$

$$54 \cdot 3^2 = 486 = 22^2 + 2$$

$$\text{RGIV} \longrightarrow v_1 = 22$$

$$y = v_1 \cdot v_2 = 22 \cdot 3 = 66$$

$$1 + 54 \cdot 66^2 = 485^2$$

Różnica między kolejnymi t to 3, a między kolejnymi a to 2.

$$D = 19 \quad t = 4 \quad a = 3 \quad v_2 = 3 \longrightarrow y = 39 \quad \text{gr. "-2"}$$

$$D = 54 \quad t = 7 \quad a = 5 \quad v_2 = 3 \longrightarrow y = 66 \quad \text{gr. "-2"}$$

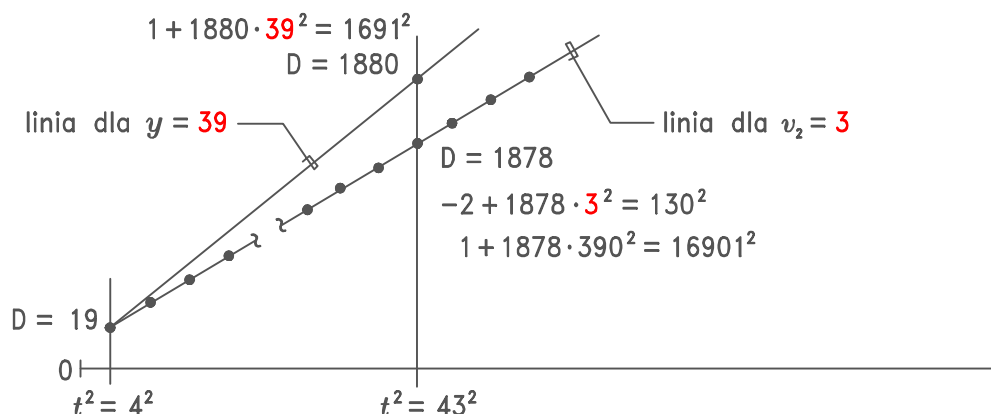
$$D = 107 \quad t = 10 \quad a = 7 \quad v_2 = 3 \longrightarrow y = 93 \quad \text{gr. "-2"}$$

$$D = 178 \quad t = 13 \quad a = 9 \quad v_2 = 3 \longrightarrow y = 120 \quad \text{gr. "-2"}$$

$$D = 267 \quad t = 16 \quad a = 11 \quad v_2 = 3 \longrightarrow y = 147 \quad \text{gr. "-2"}$$

.....

D jak wyżej leżą na jednej prostej różnej od tej dla której y są takie same, a wspólny punkt mają w $D = 19$. Możemy to sobie przedstawić jak niżej:



$$1 + 185 \cdot 680^2 = 9249^2 \quad 185 = 14^2 - 11 \quad t = 14 \quad a = 11 \quad v_2 = 5 \quad \text{gr. "-1"} \quad D = 185$$

$$\frac{a}{t} = \frac{x}{t + v_2} \quad x \text{ to } a \text{ dla najbliższego poszukiwanego } D$$

$$t + v_2 \text{ to } t \text{ dla najbliższego poszukiwanego } D$$

$$\frac{11}{14} = \frac{x}{14 + 5} \longrightarrow x = 14.92... \cong 15$$

$$\text{Nowe } D = 19^2 - 15 = 346$$

$$346 \cdot 5^2 = 8650 = 93^2 + 1 \quad \text{RGII} \longrightarrow v_1 = 186 \quad y = v_1 \cdot v_2 = 186 \cdot 5 = 930$$

$$1 + 346 \cdot 930^2 = 17299^2$$

Różnica między kolejnymi t to 5, a między kolejnymi a to 4.

$$D = 185 \quad t = 14 \quad a = 11 \quad v_2 = 5 \longrightarrow y = 680 \quad \text{gr. "-1"}$$

$$D = 346 \quad t = 19 \quad a = 15 \quad v_2 = 5 \longrightarrow y = 930 \quad \text{gr. "-1"}$$

$$D = 557 \quad t = 24 \quad a = 19 \quad v_2 = 5 \longrightarrow y = 1180 \quad \text{gr. "-1"}$$

$$D = 818 \quad t = 29 \quad a = 23 \quad v_2 = 5 \longrightarrow y = 1430 \quad \text{gr. "-1"}$$

W tym przykładzie mamy możliwość znalezienia mniejszych D dla których $v_2 = 5$.

$$D = 185 \quad t = 14 \quad a = 11 \quad v_2 = 5 \longrightarrow y = 680 \quad \text{gr. "-1"}$$

$$\quad \quad \quad -5 \quad \quad -4$$

$$D = 74 \quad t = 9 \quad a = 7 \quad v_2 = 5 \longrightarrow y = 430 \quad \text{gr. "-1"}$$

$$\quad \quad \quad -5 \quad \quad -4$$

$$D = 13 \quad t = 4 \quad a = 3 \quad v_2 = 5 \longrightarrow y = 180 \quad \text{gr. "±4-1"}$$

Jeżeli D należy tylko do grupy "+1" to kolejne mniejsze i większe D o tym samym y też należą tylko do grupy "+1".

Dla D należących do grupy "+1" i jakiegś innej grupy zawsze istnieje jakieś najmniejsze D z którego będą wychodzić linie raz dla grupy "+1" i dla drugiej grupy.

W przypadku grup "+4", "-4", "-1" i grupy "±4-1" dochodzi do mieszania się D o tym samym y .

Jeżeli chodzi o D z grupy "±4-1" (należących też oczywiście do grupy "+1") to z najmniejszego D obliczonego podobnie jak podanych przykładach będą wychodzić 4-ry linie:

- z tym samym y jak w najmniejszym D
- z tym samym v_2 równym v_2 dla "-4" w grupie "±4-1"
- z tym samym v_2 równym v_2 dla "-1" w grupie "±4-1"
- z tym samym v_2 równym v_2 dla "+4" w grupie "±4-1"

Na stronie 14-tej w rozdziale "Graficzne przedstawienie poszczególnych grup liczb D " pokazano przykładowo przebieg linii przez punkty (D) o tych samych wartościach v_2 w grupie "-2".

Kiedy przekształcamy RP przy pomocy $\triangle$ -ty otrzymujemy równania o których możemy powiedzieć:

- 1) D pozostaje bez zmian (19 w przykładzie poniżej) i są to kolejne 2-gie, 4-te, 8-me..... RP dla danego D . Zmienia się y .
- 2) bez zmian pozostaje y (39 w przykładzie poniżej). Zmienia się D i są to równania w których y pozostaje najmniejsze dla kolejnych rosnących D .
- 3) wartości D i y w kolejnych równaniach możemy dowolnie "mieszać", ale wtedy nie zawsze będą to rozwiązania najmniejsze.

$$1 + 19 \cdot 39^2 = 170^2 / \triangle$$

$$1 + 19(2 \cdot 170)^2 39^2 = 57799^2 / \triangle$$

$$1 + 19(4 \cdot 170 \cdot 57799)^2 39^2 = 6681448801^2 / \triangle$$

$$1 + 19(8 \cdot 170 \cdot 57799 \cdot 6681448801)^2 39^2 = 89283516160768675201^2 / \triangle$$

.....