

Rozwiązania większe od najmniejszego

Zanim zajmiemy się rozwiązywaniem równań Pella w oparciu o wyprowadzone w poprzednim rozdziale wzory pomocna okazuje się znajomość otrzymywania rozwiązań kolejnych po najmniejszym.

To znane wzory:

$$x_n = \frac{(p + q\sqrt{D})^n + (p - q\sqrt{D})^n}{2}$$

$$y_n = \frac{(p + q\sqrt{D})^n - (p - q\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}$$

Dla $n=1$ mamy rozwiązanie najmniejsze a dowolne kolejne rozwiązanie otrzymujemy przyjmując za p i q odpowiednio x_1 i y_1 oraz odpowiednie n .

Dla przykładu z powyższych wzorów otrzymamy (pomijamy proste obliczenia):

$1 + 3 \cdot 1^2 = 2^2$	$1 + 300 \cdot 78^2 = 1351^2$
$1 + 3 \cdot 4^2 = 7^2$	$1 + 300 \cdot 210756^2 = 3650401^2$
$1 + 3 \cdot 15^2 = 26^2$	$1 + 300 \cdot 569462634^2 = 9863382151^2$
$1 + 3 \cdot 56^2 = 97^2$	$1 + 300 \cdot 1538687826312^2 = 26650854921601^2$

Mozemy też posługiwać się wzorami:

$$\begin{aligned}x_1 &= a & y_1 &= b \\x_{n+1} &= a x_n^2 + D b y_n & y_{n+1} &= b x_n + a y_n\end{aligned}$$

Tą metodą otrzymujemy kolejne rozwiązania poczynsz od numeru 2 i po kolei następne. Chyba, że znamy na przykład rozwiązanie numer 8 (i oczywiście najmniejsze) to możemy obliczyć rozwiązanie numer 9. Ta metoda wydaje się prostsza niż poprzednia, szczególnie kiedy chcemy znać kilka początkowych rozwiązań.

Dla $D = 300$ (jak wyżej) rozwiązanie numer 3 otrzymujemy przyjmując:

$x_1 = a = 1351$	$y_1 = b = 78$
$x_2 = 3650401$	$y_2 = 210756$
$x_3 = 1351 \cdot 3650401 + 300 \cdot 78 \cdot 210756 = 9863382151$	$y_3 = 78 \cdot 3650401 + 1251 \cdot 210756 = 569462634$
$1 + 300 \cdot 569462634^2 = 9863382151^2$	

Drugie z kolei rozwiązanie możemy otrzymać z pierwszego przekształcając je przy pomocy $\triangle$ -ty.

$1 + D y^2 = x^2$	$1 + 3 \cdot 1^2 = 2^2$	
$x^2 - 1 - D y^2 = 0 / \triangle$	$2^2 - 1 - 3 \cdot 1^2 = 0$	
$1 + D(2xy)^2 = (x^2 + D y^2)^2$	$1 + 3 \cdot 4 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = 7^2$	$1 + 3 \cdot 4^2 = 7^2$ rozwiązanie numer 2 (jak wyżej)
	$1 + 3 \cdot 4 \cdot 4^2 \cdot 7^2 = 97^2$	$1 + 3 \cdot 56^2 = 97^2$ rozwiązanie numer 4 (jak wyżej)

Tym sposobem z rozwiązania numer 2 możemy otrzymywać rozwiązanie 4, z 3 rozwiązanie 6, z 4 rozwiązanie 8 itd.. Jednak, żeby otrzymać rozwiązania numer 3, 5, 7, 9, 11 itd.. musimy używać wzorów jak wyżej. W ten sposób po otrzymaniu rozwiązania numer 3 przekształcenie przy pomocy $\triangle$ -ty daje rozwiązanie numer 6, 5 daje 10 itd... W tym przypadku ważna jest znajomość z którym z kolei rozwiązaniem mamy do czynienia.