

Rozwiązania ogólne

Pierwszy wniosek jaki można wyciągnąć z poznanych rozwiązań może być taki, że dobrze jest przedstawiać liczbę D w postaci $t^2 \pm a$.

I tak

$$\begin{array}{lll} D = 59 = 8^2 - 5 & t = 8 & a = 5 \\ D = 71 = 8^2 + 7 & t = 8 & a = 7 \\ D = 97 = 10^2 - 3 & t = 10 & a = 3 \\ D = 109 = 10^2 + 9 & t = 10 & a = 9 \end{array}$$

Nie wyróżniamy znaku przy a , bo wynika on z wartości D i t^2 , które są zawsze dodatnie.

Wiemy już jak rozwiązywać RP kiedy D podlega pod RG. Kolejny problem do rozwiązania to kiedy $D = t^2 \pm 3$. Można przypuszczać, że rozwiązanie tego przypadku pozwoli zrozumieć jak należy postępować w każdym innym.

Wypiszmy rozwiązania dla $D = t^2 \pm 3$.

$D = t^2 - 3$	y	rozwiązanie	$D = t^2 + 3$	y	rozwiązanie
13	180	RGVIII (bo $13 = 3^2 + 4$)	12	2	RGIX
22	42		19	39	
33	4	RGIX	28 ($D_1 = 7$)	24	RGIII
46	3588		39	4	RGIX
61	226153980		52 ($D_1 = 13$)	90	RGVIII
78	6	RGIX	67	5967	
97	6377352		84	6	RGIX
118	28254		124	414960	

Widzimy, że w kilku przypadkach potrafimy znaleźć rozwiązanie. Nie ma problemów gdy $D = t^2 \pm 3$ jest takiej postaci, że t jest podzielne przez 3 lub gdy jest to liczba podlegająca pod poznane typy rozwiązań np. 13 (VIII) i 28 (III). W pozostałych trudno niestety dopatrzeć się związku między D i y . Wartość y zmienia się w zupełnie nieoczekiwany sposób. Potrafi być mniejsza dla większego D i odwrotnie.

Możemy to wytłumaczyć tak:

prawdopodobnie rozwiązanie polega na doprowadzeniu znanego D do postaci $t^2 \pm 1, 2, 4$ lub $t^2 \pm 1, 2, 4 \frac{t}{n}$. Zajmiemy się teraz pierwszym przypadkiem tzn. RGI do RGVIII. Wtedy może być tak, że jakieś duże D daje się doprowadzić do postaci $t^2 - 1$, co od razu daje rozwiązanie, a inne mniejsze D możemy doprowadzić do postaci np. $(2t+1)^2 + 4$ i dopiero rozwiązanie tego RP daje pełną odpowiedź.

Sprawdźmy nasze przypuszczenie na przykładach:

$$1 + 13 \cdot 180^2 = 649^2$$

$$1 + 13 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 = 649^2$$

Widzimy, że $v_2^2 = 5^2$ doprowadza znane D

do postaci $D_1 = 325 = 18^2 + 1$ (RGII)

skąd $v_1 = 2 \cdot 18 = 36$

$$y = v_1 \cdot v_2 = 36 \cdot 5 = 180$$

$$1 + 19 \cdot 39^2 = 170^2$$

$$1 + 19 \cdot 3^2 \cdot 13^2 = 170^2$$

Tutaj $v_2^2 = 3^2$ doprowadza znane D

do postaci $D_1 = 171 = 13^2 + 2$ (RGIV)

skąd $v_1 = 13$

$$y = v_1 \cdot v_2 = 13 \cdot 3 = 39$$

Każde y zawiera w sobie v_2 doprowadzające dane D do postaci podlegającej pod RGI do RGVIII, W skrajnym przypadku $y = v_2$.

Teraz należałoby jakoś powiązać ze sobą wielkości v_2 , t i a . Ma to być taki związek, żeby $D = t^2 \pm a$ pomnożone przez v_2^2 dawało w wyniku nowe D spełniające wymagania RGI do RGVIII, czyli było postaci $t_1^2 \pm 1, 2, 4$. Oczywiście t_1 o którym teraz mówimy nie ma nic wspólnego z t , z RGV do RGVIII. Tak naprawdę to będzie to t w RG.

$$(t^2 + a)v_2^2 = t_1^2 \pm 1, 2, 4$$

$$(t^2 - a)v_2^2 = t_1^2 \pm 1, 2, 4$$

Liczbę t_1 możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{array}{lll} t_1 = tv_2 + p_0 & \text{dla} & D = t^2 + a \quad v_2 \geq p_0 \\ t_1 = tv_2 - p_0 & \text{dla} & D = t^2 - a \quad v_2 \geq p_0 \end{array}$$

mamy więc:

$$\begin{array}{ll} \text{dla} & D = t^2 + a \\ t^2 v_2^2 + a v_2^2 = (tv_2 + p_0)^2 \pm 1, 2, 4 & \text{dla} & D = t^2 - a \\ a v_2^2 = 2 t v_2 p_0 + p_0^2 \pm 1, 2, 4 & a v_2^2 = 2 t v_2 p_0 - p_0^2 \pm 1, 2, 4 \\ a = \frac{2 t v_2 p_0 + p_0^2 \pm 1, 2, 4}{v_2^2} & a = \frac{2 t v_2 p_0 - p_0^2 \pm 1, 2, 4}{v_2^2} \\ a = \frac{2 t p_0 + \frac{p_0^2 \pm 1, 2, 4}{v_2}}{v_2} & a = \frac{2 t p_0 - \frac{p_0^2 \pm 1, 2, 4}{v_2}}{v_2} \end{array}$$

Przyjmijmy

$$\frac{p_0^2 \pm 1, 2, 4}{v_2} = p_1$$

$$p_0^2 \pm 1, 2, 4 = p_1 v_2$$

Otrzymujemy

$$\begin{array}{ll} a = \frac{2 t p_0 + p_1}{v_2} & a = \frac{2 t p_0 - p_1}{v_2} \\ D = t^2 + \frac{2 t p_0 + p_1}{v_2} & D = t^2 - \frac{2 t p_0 - p_1}{v_2} \end{array}$$

Mnożąc "tak przygotowaną" liczbę D przez v_2^2 otrzymujemy kolejno:

$$(tv_2)^2 \text{ — pierwszy wyraz z wzoru } (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\pm 2tv_2 p_0 \text{ — drugi wyraz powyższego wzoru}$$

$$p_0^2 \text{ — trzeci wyraz } (p_1 v_2 = p_0^2 \pm 1, 2, 4)$$

$$\pm 1, 2, 4$$

$$\text{co razem daje} \quad (tv_2 \pm p_0)^2 \pm 1, 2, 4$$

czyli nowe D spełniające rozwiązania główne.

Bazą dla rozwiązania każdego przypadku RP będzie więc układ równań

$$\begin{array}{ll} \text{dla} & D = t^2 + a \\ \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2 t p_0 + p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 = p_0^2 \pm 1, 2, 4 \end{array} \right. & \text{dla} & D = t^2 - a \\ \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2 t p_0 - p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 = p_0^2 \pm 1, 2, 4 \end{array} \right. & \end{array}$$

Zanim przejdziemy do dalszych rozważań uściślenia wymagają wartości v_1 i v_2 . Ich dokładne znaczenie jest następujące:

v_1 — rozwiązuje RP, jeżeli D jest postaci podlegającej pod RGI do RGVIII

v_2 — doprowadza znane D do postaci podlegającej pod RGI do RGVIII

oraz $y = v_1 \cdot v_2$.

Rozpatrując przypadek RGVIII (str. 13 i 15) używaliśmy v_2 w trochę innym znaczeniu, co wynikało z tego, że aby obliczyć y dla $D = (2t_1 + 1)^2 + 4$ należało przejść przez pośredni stopień $D_1 = t_2^2 + 1$.

Należy pamiętać, że każde D pomnożone przez y^2 daje w wyniku:

$$t^2 - 1$$

co oznacza, że zawsze $y = v_2$ (wtedy $v_1 = 1$), plus przypadki kiedy y i v_2 się różnią.

W następnym rozdziale "Klasyfikacja liczb D" powiedziane będzie więcej o wartościach v_2 w zależności od tego do jakiej grupy należy dane D. Oprócz v_2 doprowadzających każde D (ale nie te należące do RGI–VIII) do postaci podlegających pod RGI–VIII istnieją też v_2 doprowadzające D do postaci podlegających RGIX,X,XI. Nie zajmujemy się nimi w tym opracowaniu. Możemy mówić o nich "pseudo" v_2 w dobrym znaczeniu tego słowa, bo też prowadzą do rozwiązania.

Przykłady:

D = 67	y = 5967	$v_2 = 27$	$D v_2^2 = 221^2 + 2$	RGIV
		$v_2 = 5967$	$D v_2^2 = 48842^2 - 1$	RGI
D = 70	y = 30	$v_2 = 30$	$D v_2^2 = 251^2 - 1$	RGI
		$v_2 = 3$	$D v_2^2 = 25^2 + 5$	RGIX
		$v_2 = 5$	$D v_2^2 = 42^2 - 14$	RGIX
		$v_2 = 6$	$D v_2^2 = 50^2 + 20$	RGX
		$v_2 = 10$	$D v_2^2 = 84^2 - 56$	RGX
		$v_2 = 15$	$D v_2^2 = 125^2 + 125$	RGIX
D = 464	y = 455	$v_2 = 455$	$D v_2^2 = 9801^2 - 1$	RGI
		$v_2 = 13$	$D v_2^2 = 280^2 + 16$	RGX
		$v_2 = 35$	$D v_2^2 = 754^2 - 116$	RGX
		$v_2 = 65$	$D v_2^2 = 1400^2 + 400$	RGX
		$v_2 = 91$	$D v_2^2 = 1960^2 + 784$	RGX

Wracając do wyprowadzonych wzorów, możemy je rozpisać jak niżej:

” + ”

” – ”

$$\boxed{1} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 + p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 - 4 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 + (4 - p_0^2) = 0$$

$$\boxed{1} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 - p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 - 4 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 - (4 - p_0^2) = 0$$

$$\boxed{2} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 + p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 - 2 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 + (2 - p_0^2) = 0$$

$$\boxed{2} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 - p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 - 2 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 - (2 - p_0^2) = 0$$

$$\boxed{3} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 + p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 - 1 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 + (1 - p_0^2) = 0$$

$$\boxed{3} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 - p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 - 1 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 - (1 - p_0^2) = 0$$

$$\boxed{4} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 + p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 + 1 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 - (1 + p_0^2) = 0$$

$$\boxed{4} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 - p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 + 1 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 + (1 + p_0^2) = 0$$

$$\boxed{5} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 + p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 + 2 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 - (2 + p_0^2) = 0$$

$$\boxed{5} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 - p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 + 2 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 + (2 + p_0^2) = 0$$

$$\boxed{6} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 + p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 + 4 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 - (4 + p_0^2) = 0$$

$$\boxed{6} \quad \left. \begin{aligned} a &= \frac{2tp_0 - p_1}{v_2} \\ p_1 v_2 &= p_0^2 + 4 \end{aligned} \right\} \quad a v_2^2 - 2tp_0 v_2 + (4 + p_0^2) = 0$$

Otrzymałiśmy dwanaście równań kwadratowych ze względu na v_2 . Spróbujmy je rozwiązać.

$$+ \boxed{1}$$

$$av_2^2 - 2tp_0v_2 + (4 - p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 - 4a(4 - p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 - a(4 - p_0^2)}$$

Żeby $\sqrt{\Delta}$ był liczbą naturalną musi zachodzić

$$(tp_0 + p_1)^2 = t^2p_0^2 - a(4 - p_0^2)$$

p_1 – liczba naturalna dodatnia

$$t^2p_0^2 + 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 - a(4 - p_0^2)$$

$$\boxed{ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a + p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 + p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} \quad \text{lub} \quad v_2 = -\frac{p_1}{a}$$

$$+ \boxed{2}$$

$$av_2^2 - 2tp_0v_2 + (2 - p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 - 4a(2 - p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 - a(2 - p_0^2)}$$

$$(tp_0 + p_1)^2 = t^2p_0^2 - a(2 - p_0^2)$$

$$t^2p_0^2 + 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 - a(2 - p_0^2)$$

$$\boxed{ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a + p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 + p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} \quad \text{lub} \quad v_2 = -\frac{p_1}{a}$$

$$+ \boxed{3}$$

$$av_2^2 - 2tp_0v_2 + (1 - p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 - 4a(1 - p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 - a(1 - p_0^2)}$$

$$(tp_0 + p_1)^2 = t^2p_0^2 - a(1 - p_0^2)$$

$$t^2p_0^2 + 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 - a(1 - p_0^2)$$

$$\boxed{ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (a + p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 + p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} \quad \text{lub} \quad v_2 = -\frac{p_1}{a}$$

$$+ \boxed{4}$$

$$av_2^2 - 2tp_0v_2 - (1 + p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 + 4a(1 + p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 + a(1 + p_0^2)}$$

$$(tp_0 + p_1)^2 = t^2p_0^2 + a(1 + p_0^2)$$

$$t^2p_0^2 + 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 + a(1 + p_0^2)$$

$$\boxed{ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a - p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 + p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} \quad \text{lub} \quad v_2 = -\frac{p_1}{a}$$

$$+ \boxed{5}$$

$$av_2^2 - 2tp_0v_2 - (2 + p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 + 4a(2 + p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 + a(2 + p_0^2)}$$

$$(tp_0 + p_1)^2 = t^2p_0^2 + a(2 + p_0^2)$$

$$t^2p_0^2 + 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 + a(2 + p_0^2)$$

$$\boxed{ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a - p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 + p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} \quad \text{lub} \quad v_2 = -\frac{p_1}{a}$$

$$+ \boxed{6}$$

$$av_2^2 - 2tp_0v_2 - (4 + p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 + 4a(4 + p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 + a(4 + p_0^2)}$$

$$(tp_0 + p_1)^2 = t^2p_0^2 + a(4 + p_0^2)$$

$$t^2p_0^2 + 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 + a(4 + p_0^2)$$

$$\boxed{ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a - p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 + p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} \quad \text{lub} \quad v_2 = -\frac{p_1}{a}$$

– 1

$$\alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 - (4 - p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 + 4\alpha(4 - p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 + \alpha(4 - p_0^2)}$$

Żeby $\sqrt{\Delta}$ był liczbą naturalną musi zachodzić

$$(tp_0 - p_1)^2 = t^2p_0^2 + \alpha(4 - p_0^2)$$

p_1 – liczba naturalna dodatnia

$$t^2p_0^2 - 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 + \alpha(4 - p_0^2)$$

$$\boxed{\alpha p_0^2 - 2tp_0p_1 - (4\alpha - p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 - p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{\alpha} \quad \text{lub} \quad v_2 = \frac{p_1}{\alpha}$$

– 2

$$\alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 - (2 - p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 + 4\alpha(2 - p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 + \alpha(2 - p_0^2)}$$

$$(tp_0 - p_1)^2 = t^2p_0^2 + \alpha(2 - p_0^2)$$

$$t^2p_0^2 - 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 + \alpha(2 - p_0^2)$$

$$\boxed{\alpha p_0^2 - 2tp_0p_1 - (2\alpha - p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 - p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{\alpha} \quad \text{lub} \quad v_2 = \frac{p_1}{\alpha}$$

– 3

$$\alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 - (1 - p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 + 4\alpha(1 - p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 + \alpha(1 - p_0^2)}$$

$$(tp_0 - p_1)^2 = t^2p_0^2 + \alpha(1 - p_0^2)$$

$$t^2p_0^2 - 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 + \alpha(1 - p_0^2)$$

$$\boxed{\alpha p_0^2 - 2tp_0p_1 - (\alpha - p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 - p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{\alpha} \quad \text{lub} \quad v_2 = \frac{p_1}{\alpha}$$

– 4

$$\alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 + (1 + p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 - 4\alpha(1 + p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 - \alpha(1 + p_0^2)}$$

$$(tp_0 - p_1)^2 = t^2p_0^2 - \alpha(1 + p_0^2)$$

$$t^2p_0^2 - 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 - \alpha(1 + p_0^2)$$

$$\boxed{\alpha p_0^2 - 2tp_0p_1 + (\alpha + p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 - p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{\alpha} \quad \text{lub} \quad v_2 = \frac{p_1}{\alpha}$$

– 5

$$\alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 + (2 + p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 - 4\alpha(2 + p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 - \alpha(2 + p_0^2)}$$

$$(tp_0 - p_1)^2 = t^2p_0^2 - \alpha(2 + p_0^2)$$

$$t^2p_0^2 - 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 - \alpha(2 + p_0^2)$$

$$\boxed{\alpha p_0^2 - 2tp_0p_1 + (2\alpha + p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 - p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{\alpha} \quad \text{lub} \quad v_2 = \frac{p_1}{\alpha}$$

– 6

$$\alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 + (4 + p_0^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_0^2 - 4\alpha(4 + p_0^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_0^2 - \alpha(4 + p_0^2)}$$

$$(tp_0 - p_1)^2 = t^2p_0^2 - \alpha(4 + p_0^2)$$

$$t^2p_0^2 - 2tp_0p_1 + p_1^2 = t^2p_0^2 - \alpha(4 + p_0^2)$$

$$\boxed{\alpha p_0^2 - 2tp_0p_1 + (4\alpha + p_1^2) = 0}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_0 - p_1)$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{\alpha} \quad \text{lub} \quad v_2 = \frac{p_1}{\alpha}$$

Dla $D = t^2 + a$ mamy $v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a}$

Dla $D = t^2 - a$ mamy $v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a}$

Odpowiedzi $v_2 = \pm \frac{p_1}{a}$ odrzucamy, bo mieszczą się w $\frac{2tp_0 \pm p_1}{a}$ gdy $p_0 = 0$.

Otrzymałiśmy 12-scie nowych równań. Rozwiązując je jak poprzednio otrzymujemy:

+ 1

$$ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a + p_1^2) = 0$$

$$ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (4a^2 - p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_1 + p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} \quad \text{lub} \quad p_0 = -\frac{p_2}{a}$$

+ 4

$$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a - p_1^2) = 0$$

$$ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (a^2 + p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_1 + p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} \quad \text{lub} \quad p_0 = -\frac{p_2}{a}$$

+ 2

$$ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (a + p_1^2) = 0$$

$$ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (2a^2 - p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_1 + p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} \quad \text{lub} \quad p_0 = -\frac{p_2}{a}$$

+ 5

$$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a + p_1^2) = 0$$

$$ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (2a^2 + p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_1 + p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} \quad \text{lub} \quad p_0 = -\frac{p_2}{a}$$

+ 3

$$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a - p_1^2) = 0$$

$$ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (a^2 - p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_1 + p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} \quad \text{lub} \quad p_0 = -\frac{p_2}{a}$$

+ 6

$$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a - p_1^2) = 0$$

$$ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (4a^2 + p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_1 + p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a} \quad \text{lub} \quad p_0 = -\frac{p_2}{a}$$

- 1

$$ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a - p_1^2) = 0$$

$$ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (4a^2 - p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_1 - p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} \quad \text{lub} \quad p_0 = -\frac{p_2}{a}$$

- 4

$$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a + p_1^2) = 0$$

$$ap_1^2 - 2tp_2p_0 + (a^2 + p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(tp_1 - p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a} \quad \text{lub} \quad p_0 = -\frac{p_2}{a}$$

– [2]

$$\alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 - (\alpha - p_1^2) = 0$$

$$\alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 - (2\alpha^2 - p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(t p_1 - p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{\alpha} \quad \text{lub} \quad p_0 = \frac{p_2}{\alpha}$$

– [3]

$$\alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 - (\alpha - p_1^2) = 0$$

$$\alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 - (\alpha^2 - p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(t p_1 - p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{\alpha} \quad \text{lub} \quad p_0 = \frac{p_2}{\alpha}$$

– [5]

$$\alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 + (\alpha + p_1^2) = 0$$

$$\alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 + (2\alpha^2 + p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(t p_1 - p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{\alpha} \quad \text{lub} \quad p_0 = \frac{p_2}{\alpha}$$

– [6]

$$\alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 + (\alpha + p_1^2) = 0$$

$$\alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 + (4\alpha^2 + p_2^2) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 2(t p_1 - p_2)$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{\alpha} \quad \text{lub} \quad p_0 = \frac{p_2}{\alpha}$$

Takie postępowanie możemy kontynuować jak długo zechcemy. Nie ma takiej potrzeby, właśnie otrzymane, trzy kolejne równania dla każdego przypadku pozwalają na napisanie ogólnych wzorów. Kolumna 4-ry (gdybyśmy chcieli ją dopisać) miałaby α w nawiasie w potęgze trzeciej, niewiadome p_2 i p_3 i przedstawilibyśmy w niej równania podobnie jak w kolumnie 2, żeby otrzymać dokładnie takie same znaki we wszystkich równaniach.

KOLUMNA 1

KOLUMNA 2

KOLUMNA 3

$$\begin{aligned} \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 + (4\alpha^0 - p_0^2) &= 0 \\ \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 + (2\alpha^0 - p_0^2) &= 0 \\ \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 + (\alpha^0 - p_0^2) &= 0 \\ \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 - (\alpha^0 + p_0^2) &= 0 \\ \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 - (2\alpha^0 + p_0^2) &= 0 \\ \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 - (4\alpha^0 + p_0^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 - (4\alpha^1 + p_1^2) &= 0 \\ \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 - (2\alpha^1 + p_1^2) &= 0 \\ \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 - (\alpha^1 + p_1^2) &= 0 \\ \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 + (\alpha^1 - p_1^2) &= 0 \\ \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 + (2\alpha^1 - p_1^2) &= 0 \\ \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 + (4\alpha^1 - p_1^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 + (4\alpha^2 - p_2^2) &= 0 \\ \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 + (2\alpha^2 - p_2^2) &= 0 \\ \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 + (\alpha^2 - p_2^2) &= 0 \\ \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 - (\alpha^2 + p_2^2) &= 0 \\ \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 - (2\alpha^2 + p_2^2) &= 0 \\ \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 - (4\alpha^2 + p_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 - (4\alpha^0 - p_0^2) &= 0 \\ \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 - (2\alpha^0 - p_0^2) &= 0 \\ \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 - (\alpha^0 - p_0^2) &= 0 \\ \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 + (\alpha^0 + p_0^2) &= 0 \\ \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 + (2\alpha^0 + p_0^2) &= 0 \\ \alpha v_2^2 - 2tp_0v_2 + (4\alpha^0 + p_0^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 - (4\alpha^1 - p_1^2) &= 0 \\ \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 - (2\alpha^1 - p_1^2) &= 0 \\ \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 - (\alpha^1 - p_1^2) &= 0 \\ \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 + (\alpha^1 + p_1^2) &= 0 \\ \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 + (2\alpha^1 + p_1^2) &= 0 \\ \alpha p_0^2 - 2tp_1p_0 + (4\alpha^1 + p_1^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 - (4\alpha^2 - p_2^2) &= 0 \\ \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 - (2\alpha^2 - p_2^2) &= 0 \\ \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 - (\alpha^2 - p_2^2) &= 0 \\ \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 + (\alpha^2 + p_2^2) &= 0 \\ \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 + (2\alpha^2 + p_2^2) &= 0 \\ \alpha p_1^2 - 2tp_2p_1 + (4\alpha^2 + p_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{\alpha}$$

Uporządkujmy równania w kolumnie 2 zgodnie ze strzałkami.

Teraz widoczny staje się porządek, któremu podlegają kolejne równania.

KOLUMNA 1	KOLUMNA 2 ” + ”	KOLUMNA 3
$av_2^2 - 2tp_0v_2 + (4a^0 - p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1 - p_1^2) = 0$	$p_1^2 - 2tp_2p_1 + (4a^2 - p_2^2) = 0$
$av_2^2 - 2tp_0v_2 + (2a^0 - p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a^1 - p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (2a^2 - p_2^2) = 0$
$av_2^2 - 2tp_0v_2 + (a^0 - p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a^1 - p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (a^2 - p_2^2) = 0$
$av_2^2 - 2tp_0v_2 - (a^0 + p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (a^1 + p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (a^2 + p_2^2) = 0$
$av_2^2 - 2tp_0v_2 - (2a^0 + p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a^1 + p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (2a^2 + p_2^2) = 0$
$av_2^2 - 2tp_0v_2 - (4a^0 + p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1 + p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (4a^2 + p_2^2) = 0$
	$v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a}$	$p_0 = \frac{2tp_1 + p_2}{a}$
	” — ”	
$av_2^2 - 2tp_0v_2 - (4a^0 - p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (4a^1 - p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (4a^2 - p_2^2) = 0$
$av_2^2 - 2tp_0v_2 - (2a^0 - p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a^1 - p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (2a^2 - p_2^2) = 0$
$av_2^2 - 2tp_0v_2 - (a^0 - p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (a^1 - p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 - (a^2 - p_2^2) = 0$
$av_2^2 - 2tp_0v_2 + (a^0 + p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (a^1 + p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (a^2 + p_2^2) = 0$
$av_2^2 - 2tp_0v_2 + (2a^0 + p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a^1 + p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (2a^2 + p_2^2) = 0$
$av_2^2 - 2tp_0v_2 + (4a^0 + p_0^2) = 0$	$ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (4a^1 + p_1^2) = 0$	$ap_1^2 - 2tp_2p_1 + (4a^2 + p_2^2) = 0$
	$v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a}$	$p_0 = \frac{2tp_1 - p_2}{a}$

Ogólne wzory przedstawiają się następująco:

” + ”	” — ”
$\textcircled{1} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n + (4a^{n+1} - p_{n+1}^2) = 0$ $\textcircled{2} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n + (2a^{n+1} - p_{n+1}^2) = 0$ $\textcircled{3} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n + (a^{n+1} - p_{n+1}^2) = 0$ $\textcircled{4} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n - (a^{n+1} + p_{n+1}^2) = 0$ $\textcircled{5} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n - (2a^{n+1} + p_{n+1}^2) = 0$ $\textcircled{6} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n - (4a^{n+1} + p_{n+1}^2) = 0$	$\textcircled{7} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n - (4a^{n+1} - p_{n+1}^2) = 0$ $\textcircled{8} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n - (2a^{n+1} - p_{n+1}^2) = 0$ $\textcircled{9} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n - (a^{n+1} - p_{n+1}^2) = 0$ $\textcircled{10} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n + (a^{n+1} + p_{n+1}^2) = 0$ $\textcircled{11} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n + (2a^{n+1} + p_{n+1}^2) = 0$ $\textcircled{12} \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n + (4a^{n+1} + p_{n+1}^2) = 0$
$\textcircled{25} \quad p_{n-1} = \frac{2tp_n + p_{n+1}}{a}$	$\textcircled{26} \quad p_{n-1} = \frac{2tp_n - p_{n+1}}{a}$

Powyższe równania są tak skonstruowane, że znając wartość p_{n+1} możemy obliczać kolejne p (tzn. p_n, p_{n-1} itd....). W ten sposób dochodzimy do v_2 lub y i rozwiązania danego RP. To ostatnie i najważniejsze wyprowadzone w tym opracowaniu wzory (plus wzór ze strony 34). Możemy je przekształcić tak, żeby było możliwe postępowanie odwrotne. Tzn. znając p_n możemy obliczać p_{n+1}, p_{n+2} itd....

$$\begin{array}{ll}
\text{„} + \text{”} & \text{„} - \text{”} \\
(13) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} - (4a^{n+1} + ap_n^2) = 0 & (19) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} - (4a^{n+1} - ap_n^2) = 0 \\
(14) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} - (2a^{n+1} + ap_n^2) = 0 & (20) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} - (2a^{n+1} - ap_n^2) = 0 \\
(15) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} - (a^{n+1} + ap_n^2) = 0 & (21) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} - (a^{n+1} - ap_n^2) = 0 \\
(16) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} + (a^{n+1} - ap_n^2) = 0 & (22) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} + (a^{n+1} + ap_n^2) = 0 \\
(17) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} + (2a^{n+1} - ap_n^2) = 0 & (23) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} + (2a^{n+1} + ap_n^2) = 0 \\
(18) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} + (4a^{n+1} - ap_n^2) = 0 & (24) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} + (4a^{n+1} + ap_n^2) = 0 \\
(27) \quad p_{n+1} = ap_{n-1} - 2tp_n & (28) \quad p_{n+1} = 2tp_n - ap_{n-1}
\end{array}$$

Ponizej rozpisano otrzymane właśnie równania ogólne ((13) do (24) i (27) (28)) dla wartości p_0, p_1, p_2 , ponieważ w praktyce rozwiązywania RP najczęściej je używamy.

KOLUMNA 1 „ + ”	KOLUMNA 2 „ + ”	KOLUMNA 3 „ + ”
$p_0^2 + 2tv_2 p_0 - (4 + av_2^2) = 0$	$p_1^2 + 2tp_0 p_1 - (4a + ap_0^2) = 0$	$p_2^2 + 2tp_1 p_2 - (4a^2 + ap_1^2) = 0$
$p_0^2 + 2tv_2 p_0 - (2 + av_2^2) = 0$	$p_1^2 + 2tp_0 p_1 - (2a + ap_0^2) = 0$	$p_2^2 + 2tp_1 p_2 - (2a^2 + ap_1^2) = 0$
$p_0^2 + 2tv_2 p_0 - (1 + av_2^2) = 0$	$p_1^2 + 2tp_0 p_1 - (a + ap_0^2) = 0$	$p_2^2 + 2tp_1 p_2 - (a^2 + ap_1^2) = 0$
$p_0^2 + 2tv_2 p_0 + (1 - av_2^2) = 0$	$p_1^2 + 2tp_0 p_1 + (a - ap_0^2) = 0$	$p_2^2 + 2tp_1 p_2 + (a^2 - ap_1^2) = 0$
$p_0^2 + 2tv_2 p_0 + (2 - av_2^2) = 0$	$p_1^2 + 2tp_0 p_1 + (2a - ap_0^2) = 0$	$p_2^2 + 2tp_1 p_2 + (2a^2 - ap_1^2) = 0$
$p_0^2 + 2tv_2 p_0 + (4 - av_2^2) = 0$	$p_1^2 + 2tp_0 p_1 + (4a - ap_0^2) = 0$	$p_2^2 + 2tp_1 p_2 + (4a^2 - ap_1^2) = 0$
$p_1 = av_2 - 2tp_0$	$p_2 = ap_0 - 2tp_1$	$p_3 = ap_1 - 2tp_2$
„ - ”	„ - ”	„ - ”
$p_0^2 - 2tv_2 p_0 - (4 - av_2^2) = 0$	$p_1^2 - 2tp_0 p_1 - (4a - ap_0^2) = 0$	$p_2^2 - 2tp_1 p_2 - (4a^2 - ap_1^2) = 0$
$p_0^2 - 2tv_2 p_0 - (2 - av_2^2) = 0$	$p_1^2 - 2tp_0 p_1 - (2a - ap_0^2) = 0$	$p_2^2 - 2tp_1 p_2 - (2a^2 - ap_1^2) = 0$
$p_0^2 - 2tv_2 p_0 - (1 - av_2^2) = 0$	$p_1^2 - 2tp_0 p_1 - (a - ap_0^2) = 0$	$p_2^2 - 2tp_1 p_2 - (a^2 - ap_1^2) = 0$
$p_0^2 - 2tv_2 p_0 + (1 + av_2^2) = 0$	$p_1^2 - 2tp_0 p_1 + (a + ap_0^2) = 0$	$p_2^2 - 2tp_1 p_2 + (a^2 + ap_1^2) = 0$
$p_0^2 - 2tv_2 p_0 + (2 + av_2^2) = 0$	$p_1^2 - 2tp_0 p_1 + (2a + ap_0^2) = 0$	$p_2^2 - 2tp_1 p_2 + (2a^2 + ap_1^2) = 0$
$p_0^2 - 2tv_2 p_0 + (4 + av_2^2) = 0$	$p_1^2 - 2tp_0 p_1 + (4a + ap_0^2) = 0$	$p_2^2 - 2tp_1 p_2 + (4a^2 + ap_1^2) = 0$
$p_1 = 2tp_0 - av_2$	$p_2 = 2tp_1 - ap_0$	$p_3 = 2tp_2 - ap_1$

Wypisane wyżej równania nie wydają się przydatne przy rozwiązywaniu RP. Także wartości p wyglądają na sztucznie powstałe. W RP mamy do czynienia z dwoma niewiadomymi x i y występującymi tylko w potęgach drugiej. W wyprowadzonych właśnie równaniach występują niewiadome p_n i p_{n+1} w potęgach drugiej i jako iloczyn pierwszych potęg, a oprócz tego niewiadoma n jako wykładnik potęgi. Trudno uwierzyć, że chcąc rozwiązać RP należy przejść przez rozwiązanie któregoś z tych równań i jest to często postępowanie nadzwyczaj proste.

Popatrzmy na te równania z innej strony. Przy ich rozwiązywaniu przechodzimy przez etap obliczania $\triangle$ -ty. Oczywiście jest, że w każdym podlegającym rozwiązaniu przypadku pierwiastek z $\triangle$ -ty musi być liczbą naturalną.

Przekształćmy dla przykładu dwa z otrzymanych równań:

$$(1) \quad ap_n^2 - 2tp_{n+1}p_n + (4a^{n+1} - p_{n+1}^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_{n+1}^2 - 4a(4a^{n+1} - p_{n+1}^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_{n+1}^2 - a(4a^{n+1} - p_{n+1}^2)}$$

z czego wynika, że:

$$t^2p_{n+1}^2 - a(4a^{n+1} - p_{n+1}^2) = m^2$$

$$t^2p_{n+1}^2 - 4a^{n+2} + ap_{n+1}^2 = m^2$$

$$p_{n+1}^2(t^2 + a) - 4a^{n+2} = m^2$$

$$-4a^{n+2} + Dp_{n+1}^2 = m^2$$

$$(22) \quad p_{n+1}^2 - 2tp_n p_{n+1} + (a^{n+1} + ap_n^2) = 0$$

$$\Delta = 4t^2p_n^2 - 4a(a^{n+1} + p_n^2)$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{t^2p_n^2 - a(a^{n+1} + p_n^2)}$$

z czego wynika, że:

$$t^2p_n^2 - a(a^{n+1} + p_n^2) = m^2$$

$$t^2p_n^2 - a^{n+2} - ap_n^2 = m^2$$

$$p_n^2(t^2 - a) - a^{n+2} = m^2$$

$$-a^{n+2} + Dp_n^2 = m^2$$

Rozwiązując w podobny sposób pozostałe równania możemy napisać ogólny wzór dla wszystkich przypadków:

$$\pm 1, 2, 4a^{n+1} + Dp_n^2 = m^2$$

lub w formie łatwiejszej do dyskusji:

$$\boxed{\pm 1, 2, 4a^n + Dp_{n-1}^2 = m^2}$$

$$D = t^2 \pm a$$

ORP

W skrócie będziemy je nazywać ORP (Ogólne Równanie Pella).

Pierwsze co można powiedzieć o powyższym równaniu to, że jest to równanie ogólne, którego przypadkiem szczególnym jest RP. Wystarczy, jeżeli z liczb $\pm 1, 2, 4$ wybierzemy $+1$, zamiast p_{n-1} wstawimy y , w miejsce m napiszemy x i przyjmiemy $n = 0$.

Jeżeli w ORP przyjmiemy $n = 0$ to $p_{n-1} = p_{-1}$. Nie używamy takiego symbolu, bo to już y lub v_2 .

Rozwiązanie ogólne RP polegać będzie na rozwiązaniu któregoś z równań dla $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

i przejściu od $n \geq 1$ do $n = 0$ przy pomocy równań (1) do (12) i (25) (26). W kolejnych rozdziałach zostaną opisane sposoby znajdowania równań kiedy $n \geq 1$ dla D o różnych własnościach.

Ponumerowaliśmy powyższe równania numerami od (1) do (28) po to, żeby w przyszłości łatwiej powoływać się na potrzebne akurat równanie. Do potrzebnego równania dochodzimy drogą eliminacji. Równaniami (1) do (12) i (25) (26) posługujemy się gdy poszukujemy rozwiązania RP. W zależności od tego czy $D = t^2 + a$ czy $t^2 - a$ w grę wchodzi równania (1) do (6) lub (7) do (12). Współczynnik 1, 2 lub 4-ry przy a^n mówi nam z kolei, które dwa równania z sześciu wchodzi w rachubę.

Równaniami (13) do (24) i (27) (28) posługujemy się gdy znamy rozwiązanie RP i chcemy znaleźć wartości p dla $n \geq 1$. Ten przypadek nie sprawia problemów obliczeniowych, jednak bardzo pomaga w zrozumieniu problemów ukrytych w RP i zostanie dokładnie omówiony.

Wyprowadzone w tym rozdziale wzory możemy rozpisać dla potęg n od 0 do 5-ciu, co bardzo często wystarcza do rozwiązania konkretnego RP.

$$1 + Dy^2 = x^2$$

$$y = v_1 v_2$$

$$\pm 1, 2, 4a^0 + Dv_2^2 = m^2$$

$$\pm 1, 2, 4a^1 + Dp_0^2 = m_0^2$$

$$\pm 1, 2, 4a^2 + Dp_1^2 = m_1^2$$

$$\pm 1, 2, 4a^3 + Dp_2^2 = m_2^2$$

$$\pm 1, 2, 4a^4 + Dp_3^2 = m_3^2$$

$$\pm 1, 2, 4a^5 + Dp_4^2 = m_4^2$$

$$\dots\dots\dots$$

„ — „

$$p_1 = 2tp_0 - av_2$$

$$p_2 = 2tp_1 - ap_0$$

$$p_3 = 2tp_2 - ap_1$$

$$p_4 = 2tp_3 - ap_2$$

$$p_5 = 2tp_4 - ap_3$$

$$p_6 = 2tp_5 - ap_4$$

$$p_4 = \frac{2tp_5 \pm p_6}{a}$$

$$p_3 = \frac{2tp_4 \pm p_5}{a}$$

$$p_2 = \frac{2tp_3 \pm p_4}{a}$$

$$p_1 = \frac{2tp_2 \pm p_3}{a}$$

$$p_0 = \frac{2tp_1 \pm p_2}{a}$$

$$v_2 = \frac{2tp_0 \pm p_1}{a}$$

„ + „

$$p_1 = av_2 - 2tp_0$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4$$

$$p_6 = ap_4 - 2tp_5$$

W następnych rozdziałach zajmiemy się szczegółową analizą różnych przypadków, teraz popatrzymy na dwa przykłady zastosowania wyprowadzonych wzorów.

Pierwszą liczbą D dla której nie potrafimy obecnie znaleźć rozwiązania jest 19. Co prawda mnożąc 19-scie przez 3^2 otrzymujemy $171 = 13^2 + 2$, ale jak wspomniano w rozdziale o rozwiązaniach głównych jest to tylko szczęśliwy przypadek. Rozwiążemy więc RP dla D = 19 i dodatkowo dla D = 31.

$$D = 19$$

$$D = 4^2 + 3 \quad t = 4 \quad a = 3 \quad \text{znak "+"}$$

$$19 = 2 \cdot 3^2 + 1^2$$

$$\boxed{-2 \cdot 3^2 + 19 \cdot 1^2 = 1^2} \quad -2a^2 + Dp_1^2 = m^2$$

$$p_1 = 1 \quad n = 0$$

$$\textcircled{2} \quad ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a^1 - p_1^2) = 0$$

$$\textcircled{5} \quad ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a^1 + p_1^2) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 3p_0^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 p_0 + (2 \cdot 3 - 1) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = 2$$

$$\textcircled{5} \quad 3p_0^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 p_0 - (2 \cdot 3 + 1) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{148} \text{ odpada}$$

$$p_0' = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} \text{ odpada} \quad p_0'' = \frac{8-2}{6} = 1$$

$$\textcircled{25} \quad v_2 = \frac{2tp_0 + p_1}{a} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 1 + 1}{3} = 3$$

$$19 \cdot 3^2 = 171 = 13^2 + 2 \longrightarrow v_1 = 13$$

$$y = v_1 \cdot v_2 = 13 \cdot 3 = 39$$

$$\underline{1 + 19 \cdot 39^2 = 170^2}$$

$$D = 31$$

$$D = 6^2 - 5 \quad t = 6 \quad a = 5 \quad \text{znak "-"}$$

$$31 = 9^2 - 2 \cdot 5^2$$

$$\boxed{2 \cdot 5^2 + 31 \cdot 1^2 = 9^2} \quad 2a^2 + Dp_1^2 = m^2$$

$$p_1 = 1 \quad n = 0$$

$$\textcircled{8} \quad ap_0^2 - 2tp_1p_0 - (2a^1 - p_1^2) = 0$$

$$\textcircled{11} \quad ap_0^2 - 2tp_1p_0 + (2a^1 + p_1^2) = 0$$

$$\textcircled{8} \quad 5p_0^2 - 2 \cdot 6 \cdot 1 p_0 - (2 \cdot 5 - 1) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = 18$$

$$\textcircled{11} \quad 5p_0^2 - 2 \cdot 6 \cdot 1 p_0 + (2 \cdot 5 + 1) = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{-76} \text{ odpada}$$

$$p_0' = \frac{12+18}{10} = 3 \quad p_0'' = \frac{12-18}{10} = -\frac{6}{10} \text{ odpada}$$

$$\textcircled{26} \quad v_2 = \frac{2tp_0 - p_1}{a} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 3 - 1}{5} = 7$$

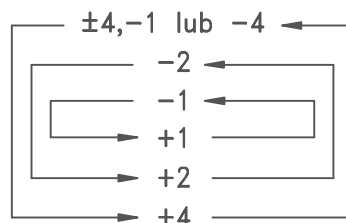
$$31 \cdot 7^2 = 1519 = 39^2 - 2 \longrightarrow v_1 = 39$$

$$y = v_1 \cdot v_2 = 39 \cdot 7 = 273$$

$$\underline{1 + 31 \cdot 273^2 = 1520^2}$$

Rozwiązując powyższe przykłady w każdym przypadku braliśmy po dwa równania kwadratowe, zamiast wziąć właściwe i kontynuować rozwiązanie. Wyprowadzając wzory przy pomocy których rozwiązaliśmy powyższe przykłady zamienialiśmy miejscami wzory w kolumnach. Teraz, żeby wybrać odpowiednie równanie musielibyśmy wdawać się w rozważania w którym właściwie miejscu znajduje się nasze konkretne równanie. Łatwiej i szybciej rozwiązywać równania kwadratowe, zwłaszcza gdy ma się do dyspozycji odpowiedni program. Kiedy znamy rozkład danego D oraz znak + lub - mamy z tego powodu do wyboru dwa równania, bo nie jesteśmy pewni czy akurat kolejność jak niżej nie została odwrócona.

grupa	+4
grupa	+2
grupa	+1
grupa	-1
grupa	-2
grupa	$\pm 4, -1 \text{ lub } -4$



Więcej o grupach liczb D w następnym rozdziale.