

Inne równania

Na początku tego opracowania pokazaliśmy jak z równań wyjściowych otrzymywać równania Pella korzystając z przekształcenia przy pomocy Δ -ty. W rezultacie otrzymaliśmy Ogólne Równanie Pella (w skrócie ORP).

$$\pm 1, 2, 4a^n + Dp_{n-1}^2 = m^2 \quad D = t^2 \pm a$$

Wykładnik potęgowy n i indeks n przy p nie mają ze sobą nic wspólnego poza tym, że niezależnie od siebie informują z którym z kolei równaniem mamy do czynienia.

Rozpisanie tego równania dla początkowych potęg, począwszy od $n = 0$ przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} 1 + Dy^2 &= x^2 & y &= v_1 v_2 \\ \pm 1, 2, 4a^0 + Dv_2^2 &= m^2 \\ \pm 1, 2, 4a^1 + Dp_0^2 &= m_0^2 \\ \pm 1, 2, 4a^2 + Dp_1^2 &= m_1^2 \\ \pm 1, 2, 4a^3 + Dp_2^2 &= m_2^2 \\ \pm 1, 2, 4a^4 + Dp_3^2 &= m_3^2 \\ \pm 1, 2, 4a^5 + Dp_4^2 &= m_4^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dla uproszczenia przyjmijmy "+1" spośród wartości " $\pm 1, 2, 4$ ".

$$\begin{aligned} a^0 + Dy^2 &= x^2 \\ a^1 + Dp_0^2 &= m_0^2 \\ a^2 + Dp_1^2 &= m_1^2 \\ a^3 + Dp_2^2 &= m_2^2 \\ a^4 + Dp_3^2 &= m_3^2 \\ a^5 + Dp_4^2 &= m_4^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Teraz widoczne jest, że wśród tych równań znajdują się takie jak niżej:

$$a^n \pm b^n = c^2 \quad (n \text{ nieparzyste większe niż } 2)$$

Będzie się tak dziać z wielu powodów. Jak choćby na przykład kiedy:

- $D = k^n$ i odpowiednie $p_n = \pm 1$ lub ± 4 i upraszcza się z tym samym współczynnikiem przy a
- $D = 2k^n$ i od p_n zależy czy iloczyn Dp_n^2 to liczba w potęgze nieparzystej (na przykład $D = 2k^7$ a odpowiednie $p_n = 5^7 \cdot 2^3$ co daje $Dp_n^2 = (2 \cdot 5^2 k)^7$)

Z tego co dotychczas napisano widać, że dając temu rozdziałowi tytuł "Inne równania" mamy na myśli to najstynniejsze

$$a^n + b^n = c^n$$

a właściwie

$$a^n \pm b^n = c^n$$

Nie określamy które z liczb a , b , c są parzyste lub nie. Ważne, że są względnie pierwsze.

Podamy teraz przykłady dla różnych D . Przyjmujemy, że znamy rozwiązania dla tych D , uzyskane metodami przedstawionymi w tym opracowaniu lub metodą łańcuchowych. To znaczy dla każdego D znamy y , v_2 i odpowiednie p_n .

Przypatrzmy się równaniu:

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

Znamy je od dawna, bo liczby w tym równaniu są bardzo małe. Spróbujmy je wyprowadzić.

$$D = 8$$

$$D = 2^3 = 2^2 + 4$$

$$t = 2$$

$$a = 4$$

znak "+" grupa "-4"

RGVI

Liczby postaci $(2t_1)^2 + 4$ podlegają pod rozwiązania główne (w tym przypadku pod RGV).

Z czego wynika $v_2 = t_1 = 1$.

$$-4 + 8 \cdot 1^2 = 2^2$$

Kiedy znamy wartość v_2 możemy obliczyć kolejne p_n .

$$(13) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} - (4a^{n+1} + ap_n^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad p_0^2 + 2tv_2 p_0 - (4a^0 + av_2^2) = 0$$

$$(18) \quad p_{n+1}^2 + 2tp_n p_{n+1} + (4a^{n+1} - ap_n^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad p_0^2 + 2tv_2 p_0 + (4a^0 - av_2^2) = 0$$

W powyższych równaniach mamy:

$$p_n = v_2$$

$$p_{n+1} = p_0 \longrightarrow n+1 = 0 \longrightarrow n = -1 \quad p_n = p_{-1} \text{ to już } v_2 \text{ lub } y.$$

$$(13) \quad p_0^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 p_0 - (4 \cdot 4^0 + 4 \cdot 1^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad p_0^2 + 4 p_0 - 8 = 0 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{48} \quad \text{odpada}$$

$$(18) \quad p_0^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 p_0 + (4 \cdot 4^0 - 4 \cdot 1^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad p_0^2 + 4 p_0 = 0 \quad \sqrt{\Delta} = 4$$

$$p_0 = \frac{-4+4}{2} = 0 \quad p_0 = \frac{-4-4}{2} = -4$$

Kolejne wartości p obliczamy z wzorów (strona 34):

$$p_1 = av_2 - 2tp_0$$

$$p_2 = ap_0 - 2tp_1$$

$$p_3 = ap_1 - 2tp_2$$

$$p_4 = ap_2 - 2tp_3$$

$$p_5 = ap_3 - 2tp_4$$

$$p_6 = ap_4 - 2tp_5$$

$$p_0 = 0 \quad t = 2 \quad a = 4 \quad v_2 = 1$$

$$p_1 = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 0 = 4$$

$$p_2 = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = -16$$

$$p_3 = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot (-16) = 80$$

$$p_4 = 4 \cdot (-16) - 2 \cdot 2 \cdot 80 = -384$$

$$p_5 = 4 \cdot 80 - 2 \cdot 2 \cdot (-384) = 1856$$

$$p_6 = 4 \cdot (-384) - 2 \cdot 2 \cdot 1856 = -8960$$

$$p_0 = -4 \quad t = 2 \quad a = 4 \quad v_2 = 1$$

$$p_1 = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-4) = 20$$

$$p_2 = 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 2 \cdot 20 = -96$$

$$p_3 = 4 \cdot 20 - 2 \cdot 2 \cdot (-96) = 464$$

$$p_4 = 4 \cdot (-96) - 2 \cdot 2 \cdot 464 = -2240$$

$$p_5 = 4 \cdot 464 - 2 \cdot 2 \cdot (-2240) = 10816$$

$$p_6 = 4 \cdot (-2240) - 2 \cdot 2 \cdot 10816 = -52224$$

Teraz dla obu przypadków p_0 wypiszemy równania w których a występuje w potęgze nieparzystej ($n > 2$).

$$+4 \cdot 4^3 + 8(-16)^2 = 48^2$$

$$+4 \cdot 4^5 + 8(-384)^2 = 1088^2$$

$$+4 \cdot 4^7 + 8(-8960)^2 = 25344^2$$

$$+4 \cdot 4^3 + 2^3(-96)^2 = 272^2$$

$$+4 \cdot 4^5 + 2^3(-2240)^2 = 6336^2$$

$$+4 \cdot 4^7 + 2^3(-52224)^2 = 147712^2$$

Po uproszczeniach:

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1^5 + 2^3 \cdot 6^2 = 17^2$$

$$1^7 + 2^3 \cdot 35^2 = 99^2$$

$$1^3 + 2^3 \cdot 6^2 = 17^2$$

$$1^5 + 2^3 \cdot 35^2 = 6336^2$$

$$1^7 + 2^3 \cdot 204^2 = 577^2$$

W skrócie całe postępowanie przedstawia się jak niżej:

$$\begin{aligned}
 1 + 8 \cdot 1^2 &= 3^2 \\
 -4 \cdot 4^0 + 8 \cdot 1^2 &= 2^2 \\
 4 \cdot 4^1 + 8 \cdot 0^2 &= 4^2 \\
 -4 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^2 &= 8^2 \\
 4 \cdot 4^3 + 8 \cdot (-16)^2 &= 48^2 \longrightarrow 1^3 + 2^3 = 3^2
 \end{aligned}$$

Równanie $1^3 + 2^3 = 3^2$ to jedno z równań ORP po uproszczeniu.

Dla przypomnienia.

$D = 8$ należy do grupy "+1" i grupy "-4". Równanie powyżej otrzymaliśmy rozpatrując $D = 8$ w grupie "-4". Dla $D = 8$ w grupie "+1" odpowiednie równania to:

$D = 8$	$D = 2^3 = 3^2 - 1$	$t = 3$	$\alpha = 1$	znak "-"	grupa "+1"	RGI
	$1^0 + 8 \cdot 1^2 = 3^2$					
	$1^1 + 8 \cdot 0^2 = 1^2$					
	$1^2 + 8 \cdot (-1)^2 = 3^2$					
	$1^3 + 8 \cdot (-6)^2 = 17^2$					
	$1^4 + 8 \cdot (-35)^2 = 99^2$					
	$1^5 + 8 \cdot (-204)^2 = 577^2$					
						

$D = 128$	$D = 2^7 = 11^2 + 7$	$t = 11$	$\alpha = 7$	znak "+"	grupa "+1"
-----------	----------------------	----------	--------------	----------	------------

	$1 + 128 \cdot 51^2 = 577^2$	
$y = 51$	$p_0 = 16$	$p_1 = 5$
	$p_2 = 2$	
	$-7^1 + 128 \cdot 16^2 = 181^2$	
	$7^2 + 128 \cdot 5^2 = 57^2$	
	$-7^3 + 128 \cdot 2^2 = 13^2 \longrightarrow (2^3)^3 - 7^3 = 13^2$	

W tym przypadku $p_2^2 = 2^2$ uzupełniło $D = 128$ do liczby którą możemy wyrazić w 3-ciej potęgze.

To były proste przykłady. Znając równania:

$$\begin{aligned}
 1^3 + 2^3 &= 3^2 \\
 (2^3)^3 - 7^3 &= 13^2
 \end{aligned}$$

stosunkowo łatwo znaleźć odpowiednie równanie Pella. Najczęściej jednak jest to dosyć trudne zadanie. Na przykład w przypadkach jak niżej:

$$\begin{aligned}
 11^3 + 37^3 &= 228^2 \\
 23^3 + 1177^3 &= 40380^2
 \end{aligned}$$

Stopień trudności nie jest w tym przypadku ważny. Istotne jest, że dla wszystkich wynikających z ORP związków:

$$a^n \pm b^n = c_1^2$$

wyraz c_1 musi być równy c^n , jeżeli prawa strona równania miałaby być n -tą potęgą.

Przyjmując, że to zachodzi otrzymujemy:

$$a^n \pm b^n = c^{2n}$$

To równanie wynika z ORP.

Zajmiemy się teraz lewą stroną tego równania tzn. wyrażeniem $a^n \pm b^n$

Mozemy spróbować napisać równanie wyjściowe dla tego wyrażenia (tak dobrze sprawdziło się to w przypadku równania Pella więc czemu nie). Można to uczynić na wiele sposobów, które w sumie sprowadzają się do tego samego wyniku.

Na przykład:

$$\frac{b_1^n}{4} \pm a_1 \pm b_2^n = 0 / \triangle \quad b_1 \cdot b_2 = b \quad b_1, b_2 \text{ względnie pierwsze}$$

$$a_1^2 \pm b^n = c_1^2$$

Takie równanie zawsze zachodzi, bo a_1 to wynik dodawania lub odejmowania $\frac{b_1^n}{4}$ i b_2^n .

Żeby po lewej stronie otrzymać

$$a^n \pm b^n$$

musimy założyć $a_1 = a^n$ i wtedy

$$\frac{b_1^n}{4} \pm a^n \pm b_2^n = 0 / \triangle$$

$$a^{2n} \pm b^n = c_1^2$$

Potwierdza się to co stwierdziliśmy rozpatrując ORP. Prawa strona równania musi być kwadratem jakiejś liczby w potęgze n , jeśli ma zachodzić równanie Fermata. Dochodzi też jeszcze jeden warunek. Jeden z wyrazów a^n lub b^n musi się dać przedstawić w potęgze drugiej. Równanie Fermata spełniające te warunki wyglądałoby jak niżej:

$$a^{2n} \pm b^n = c^{2n}$$

Skąd

$$b^n = (c^n + a^n)(c^n - a^n) \quad \text{lub} \quad b^n = (a^n + c^n)(a^n - c^n)$$

$$b_1^n \cdot b_2^n = (c^n + a^n)(c^n - a^n) \quad \text{lub} \quad b_1^n \cdot b_2^n = (a^n + c^n)(a^n - c^n)$$

I na przykład

$$b_1^n = c^n + a^n$$

Co oznacza, że znaleźliśmy równanie mniejsze niż to, które rozpatrywaliśmy, co nie może zachodzić bez końca.

Mozemy też porównać ze sobą lewe strony równań otrzymanych raz z ORP i ponownie z równania wyjściowego przekształconego przy pomocy $\triangle$ -ty.

$$a^{2n} \pm b^n = a^n \pm b^n$$

$$a^n = 1$$

Co zachodzi tylko wtedy gdy c_1 nie jest n -tą potęgą jak na przykład w równaniu $1^3 + 2^3 = 3^2$. A w ogólnym przypadku

$$a^n = c^n \pm b^n$$

nie może zachodzić kiedy $a^n = 1$.

Dla wykładnika potęgowego $n=2$ lub $2k$ powyższy wywód traci sens, bo nie zachodzą odpowiednie ORP. Z oczywistych powodów nie rozpatrujemy przypadku $n=1$.

W przypadkach kiedy $a^n \pm b^n$ jest jakąś dowolną liczbą nie będącą kwadratem ORP "znajduje" sposób, żeby po prawej stronie tego równania był wyraz w potęgze drugiej.

$$a^n \pm b^n p_{n-1}^2 = m^2$$

Równanie wyjściowe dla lewej strony tego równania podobnie jak zrobiliśmy to wcześniej to:

$$\frac{b_1^n}{4} \pm a_1 \pm b_2^n p_{n-1}^2 = 0 / \triangle \quad b_1 \cdot b_2 = b \quad b_1, b_2 \text{ względnie pierwsze}$$

$$a_1^2 \pm b^n p_{n-1}^2 = c_1^2$$

$$a_1 = a^n$$

$$a^{2n} \pm b^n p_{n-1}^2 = c_1^2$$

Co prowadzi do

$$a^{2n} \pm b^n p_{n-1}^2 = a^n \pm b^n p_{n-1}^2$$

$$a^n = 1$$

To jest prawdziwe dla ostatnio wypisanych równań, ale nie dla równania

$$a^n \pm b^n = c^n$$

Tak wygląda spojrzenie na powyższe równanie od strony ORP. Czy jest poprawne???