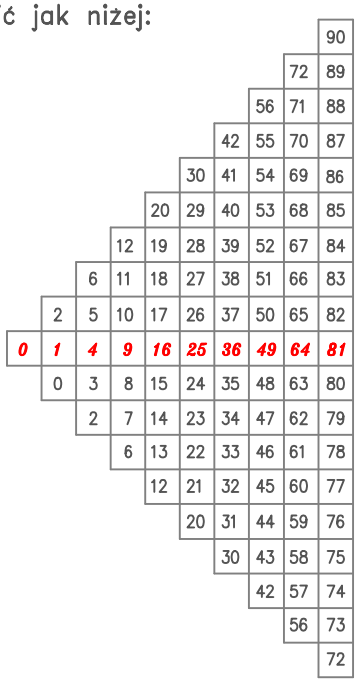
Rozwiązania główne

Każdą liczbę D możemy jednoznacznie określić wzorem:

$$D = t^2 \pm a \qquad t \geqslant a$$

Co graficznie można przedstawić jak niżej:



Każde D możemy na wiele sposobów przedstawić w postaci $D = t^2 \pm a$.

Np. $67 = 8^2 + 3$ $\qquad$ $67 = 9^2 - 14$

$67 = 7^2 + 18$ $\qquad$ $67 = 10^2 - 33$

$67 = 6^2 + 31$ $\qquad$ $67 = 11^2 - 54$

Jak się okaże dla wzorów które wyprowadzimy nie będzie mieć znaczenia czy t jest większe czy też mniejsze niż a, ale warunek $t \geqslant a$ wybiera spośród nieskończonej liczby możliwości jeden najbardziej oczywisty i ma znaczenie przy dalszym postępowaniu z równaniem Pella po znalezieniu rozwiązania.

Kwadrat leżący najbliżej liczby D to właśnie t^2. W przypadku $a = t$ mamy do wyboru jeden z dwóch kolejnych kwadratów.

Przykłady $\qquad$ $D = 55 = 7^2 + 6$, $\qquad$ $t = 7, \quad a = 6$

$D = 95 = 10^2 - 5$, $\qquad$ $t = 10, \quad a = 5$

$D = 110 = 10^2 + 10 = 11^2 - 11$ $\qquad$ $t = 10, \quad a = 10,$ lub $t = 11, \quad a = 11$

Dla D jak w ostatnim przykładzie, żeby uniknąć dwuznaczności, możemy zawsze przyjmować mniejsze t.

Przypatrując się rozwiązaniom dla D od 2 do 102 można zauważyć pewne regularności. Na przykład dla $y = 1$ mamy D=3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99. Wszystkie te liczby są postaci $t^2 - 1$. I zaraz zrozumiałe staje się dlaczego w takich przypadkach $y = 1$.

$$1 + (t^2 - 1) \cdot 1^2 = t^2$$

$$t^2 = t^2$$

Jeżeli $D = t^2 + 1$ to mamy odpowiednio

D	t	y
2	1	2
5	2	4
10	3	6
17	4	8
26	5	10
37	6	12
....	....	....

Tutaj $y = 2t$.

Dla $D = t^2 - 2$ zależności są następujące

D	t	y
2	2	2
7	3	3
14	4	4
23	5	5
34	6	6
47	7	7
....	....	....

Mamy więc $y = t$.

Podobnie dla $D = t^2 + 2$

D	t	y
3	1	1
6	2	2
11	3	3
18	4	4
27	5	5
38	6	6
....	....	....

jest $y = t$.

Kiedy $D = (2t_1)^2 - 4$
$t = 2t_1$

D	t_1	y
12	2	2
32	3	3
60	4	4
96	5	5
....	....	....

z czego wynika $y = t_1$.

Ponieważ okazuje się, że musimy rozróżnić t parzyste i nieparzyste wprowadziliśmy wielkość t_1.

Kolejny przypadek to $D = (2t_1)^2 + 4$
$t = 2t_1$

D	t_1	y
20	2	2
40	3	3
68	4	4
104	5	5
....	....	....

i tak jak poprzednio $y = t_1$.

Jeżeli $D = (2t_1 + 1)^2 - 4$
$t = 2t_1 + 1$

D	t_1	y
5	1	4
21	2	12
45	3	24
77	4	40
....	....	....

Tutaj łatwo zauważyć związek

$$y = \frac{D-1}{2} + 2$$

W dotychczasowych przypadkach używaliśmy wielkości t lub t_1 więc, żeby być konsekwentnym

$$y = \frac{(2t_1+1)^2-4-1}{2} + 2$$

$$y = \frac{4t_1^2+4t_1+1-4-1}{2} + 2$$

$$y = 2t_1(t_1+1)$$

Pozostał przypadek $D = (2t_1+1)^2+4$

$t = 2t_1+1$

D	t_1	y
13	1	180
29	2	1820
53	3	9100
85	4	30996
....	....	....

Widzimy, ze jakiś związek między D i y zachodzi, bo im większe D tym większe y, chociaż nie jest to zależność liniowa. Wartość y rośnie znacznie szybciej niż D. Przypatrzmy się podzielnikom liczby y.

y	
180	$4 \cdot 9 \cdot 5$
1820	$4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
9100	$4 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 13$
30996	$4 \cdot 27 \cdot 7 \cdot 41$

W podanych przykładach wśród podzielników liczby y zawsze możemy znaleźć taki podzielnik, że iloczyn liczby D i tego podzielnika w kwadracie daje D_1 takie, które można przedstawić w postaci t^2+1.

D	D_1
13	$13 \cdot 5^2 = 325 = 18^2+1$
29	$29 \cdot 13^2 = 4901 = 70^2+1$
53	$53 \cdot 25^2 = 33125 = 182^2+1$
85	$85 \cdot 41^2 = 142885 = 378^2+1$

Równania w których D jest postaci t^2+1 potrafimy już rozwiązywać. W tych równaniach $y=2t$. W naszych przykładach należy brać t dla liczby D_1. Teraz, żeby obliczyć całkowite y należy pomnożyć przez siebie podzielnik, który dał nam D_1 i $2t$ (gdzie t jest wzięte dla liczby D_1).

D	y całkowite
13	$5 \cdot 2 \cdot 18 = 180$
29	$13 \cdot 2 \cdot 70 = 1820$
53	$25 \cdot 2 \cdot 182 = 9100$
85	$41 \cdot 2 \cdot 378 = 30996$

Zaglądnijmy do tabeli równań wyjściowych dla rozpatrywanych D. Podzielniki, które przekształcają D w D_1 to nic innego jak v_2 w tych równaniach. Pozostaje znaleźć związek między v_2 i t_1.
Biorąc pod uwagę nasze przykłady można napisać:

$$v_2 = \frac{(2t_1+1)^2+1}{2}$$

I oczywiście

$$D_1 = D\left[\frac{(2t_1+1)^2+1}{2}\right]^2 = \left[2(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)\right]^2+1$$

Dla liczb postaci t^2+1 mamy $y = 2t$. Co w rozpatrywanym przypadku oznacza:

$$y = 4(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1) \cdot \frac{(2t_1+1)^2+1}{2}$$

$$y = 4(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)(2t_1^2+2t_1+1)$$

Pokazaliśmy jak rozwiązywać RP w których

$$D = t^2 \pm 1$$
$$D = t^2 \pm 2$$
$$D = t^2 \pm 4$$

Wszystko co dotychczas powiedziano oparte było na przykładach i mimo, że wnioski co do metod znajdowania y wydają się być zasadne pokazemy teraz, ze obowiązują zawsze. Przy okazji ponumerujemy te rozwiązania liczbami rzymskimi.

I

$D = t^2 - 1$ to $y = 1$ $x = t$

$$1 + (t^2 - 1)1^2 = t^2$$
$$t^2 = t^2$$

II

$D = t^2 + 1$ to $y = 2t$ $x = 2t^2 + 1$

$$1 + (t^2 + 1)(2t)^2 = \left[(2t^2 + 1)\right]^2$$
$$1 + 4t^4 + 4t^2 = 4t^4 + 4t^2 + 1$$

III

$D = t^2 - 2$ to $y = t$ $x = t^2 + 1$

$$1 + (t^2 - 2) \cdot t^2 = (t^2 - 1)^2$$
$$1 + t^4 - 2t^2 = t^4 - 2t^2 + 1$$

IV

$D = t^2 + 2$ to $y = t$ $x = t^2 + 1$

$$1 + (t^2 + 2) \cdot t^2 = (t^2 + 1)^2$$
$$1 + t^4 + 2t^2 = t^4 + 2t^2 + 1$$

V

$D = (2t_1)^2 - 4$ to $y = t_1$ $x = 2t_1^2 - 1$

$$1 + \left[(2t_1)^2 - 4\right] t_1^2 = (2t_1^2 - 1)^2$$
$$1 + 4t_1^4 - 4t_1^2 = 4t_1^4 - 4t_1^2 + 1$$

VI

$D = (2t_1)^2 + 4$ to $y = t_1$ $x = 2t_1^2 + 1$

$$1 + \left[(2t_1)^2 + 4\right] t_1^2 = (2t_1^2 + 1)^2$$
$$1 + 4t_1^4 + 4t_1^2 = 4t_1^4 + 4t_1^2 + 1$$

VII

$D=(2t_1+1)^2-4$ to $y=2t_1(t_1+1)=\dfrac{(2t_1+1)^2-1}{2}$ $x=(2t_1+1)(2t_1^2+2t_1-1)$

$2t_1+1=u$

$$1+\left[(2t_1+1)^2-4\right]\left[\frac{(2t_1+1)^2-1}{2}\right]^2=$$

$$=1+(u^2-4)\frac{(u^2-1)^2}{4}=\frac{4+(u^2-4)(u^2-1)^2}{4}=\frac{4+(u^2-4)(u^4-2u^2+1)}{4}=$$

$$=\frac{4+u^6-2u^4+u^2-4u^4+8u^2-4}{4}=\frac{u^6-6u^4+9u^2}{4}=\frac{u^2(u^4-6u^2+9)}{4}=$$

$$=\frac{u^2(u^2-3)^2}{4}=\left[\frac{u(u^2-3)}{2}\right]^2$$

$$x=\frac{u(u^2-3)}{2}=\frac{(2t_1+1)\left[(2t_1+1)^2-3\right]}{2}=\frac{(2t_1+1)(4t_1^2+4t_1-2)}{2}=$$

$$=(2t_1+1)(2t_1^2+2t_1-1)$$

VIII

$D=(2t_1+1)^2+4$ to $v_2=\dfrac{(2t_1+1)^2+1}{2}$ $Dv_2^2=t_2^2+1$

$2t_1+1=u$

$$Dv_2^2=\left[(2t_1+1)^2+4\right]\left[\frac{(2t_1+1)^2+1}{2}\right]^2=\frac{(u^2+4)(u^4+2u^2+1)}{4}=\frac{u^6+6u^4+9u^2+4}{4}=$$

$$=\left[\frac{u(u^2+3)}{2}\right]^2+1=\left\{\frac{(2t_1+1)\left[(2t_1+1)^2+3\right]}{2}\right\}^2+1=\left[\frac{(2t_1+1)(4t_1^2+4t_1+4)}{2}\right]^2+1=$$

$$=\left[2(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)\right]^2+1$$

$t_2=2(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)$

$$y=2t_2v_2=2\cdot 2(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)\frac{(2t_1+1)^2+1}{2}=2(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)(4t_1^2+4t_1+1+1)=$$

$$=4(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)(2t_1^2+2t_1+1)$$

$x=2t_2^2+1=8(2t_1+1)^2(t_1^2+t_1+1)^2+1$

Osiem omówionych przypadków zaliczamy do tzw. rozwiązań głównych.
Będziemy je w skrócie oznaczać RGI, RGII..... RGVIII.

Ustaliliśmy już, że liczbę D będziemy przedstawiać jak niżej:

$$D=t^2\pm a$$

gdzie $t\geqslant a$, ze względu na jednoznaczność.

Liczba D = 13 to zgodnie z powyższym 4^2-3. Wyprowadzając wzory na rozwiązania główne nie braliśmy pod uwagę warunku $t\geqslant a$ i możemy powiedzieć, że D = 13 to 3^2+4 czyli D postaci $(2t_1+1)^2+4$.

$D = 13,\ t_1 = 1\ \ a = 4$ bo $D = (2\cdot 1 + 1)^2 + 4 = 13$ RGVIII

$$y = 4(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)(2t_1^2+2t_1+1) = 180$$

$$x = 8(2t_1+1)^2(t_1^2+t_1+1)^2+1 = 649$$

$$1 + 13\cdot 180^2 = 649^2$$

Ten przykład to tylko ilustracja jak "mocne" są wzory na rozwiązania główne. Było to zresztą największe D dla którego zachodzi taka niejednoznaczność. Począwszy od $t^2 = 16$ różnica między kolejnymi kwadratami wynosi co najmniej 9 co wyklucza podobne przypadki.

Przypatrując się rozwiązaniom RP można zauważyć wiele innych zależności, poza już omówionymi. Nie będziemy już powoływać się na przykłady, ale od razu pokazywać rozwiązanie. Zachowamy też sposób numeracji liczbami rzymskimi.

IX

$D = t^2 \pm \frac{t}{n}$ to $y = 2n,$ $x = 2tn \pm 1$

$$1 + (t^2 \pm \tfrac{t}{n})(2n)^2 = (2tn \pm 1)^2$$

$$1 + 4t^2n^2 \pm 4tn = 4t^2n^2 \pm 4tn + 1$$

lub

$D = (mn)^2 \pm m$ to $y = 2n$ $x = 2mn^2 \pm 1$

$$1 + (m^2n^2 \pm m)(2n)^2 = (2mn^2 \pm 1)^2$$

$$1 + 4m^2n^4 \pm 4mn^2 = 4m^2n^4 \pm 4mn^2 + 1$$

X

$D = t^2 \pm \frac{2t}{n}$ to $y = n$ $x = tn \pm 1$

$$1 + (t^2 \pm \tfrac{2t}{n})n^2 = (tn \pm 1)^2$$

$$1 + t^2n^2 \pm 2tn = t^2n^2 \pm 2tn + 1$$

lub

$D = (mn)^2 \pm 2m$ to $y = n$ $x = mn^2 \pm 1$

$$1 + (m^2n^2 \pm 2m)n^2 = (mn^2 \pm 1)^2$$

$$1 + m^2n^4 \pm 2mn^2 = m^2n^4 \pm 2mn^2 + 1$$

XI

$D = t^2 \pm \frac{4t}{n}$ to $v_2 = n$

$$(t^2 \pm \tfrac{4t}{n})n^2 = t^2n^2 \pm 4tn = t^2n^2 \pm 4tn + 4 - 4 = (tn \pm 2)^2 - 4$$

Mnożąc $D = t^2 \pm \frac{4t}{n}$ przez n^2 otrzymaliśmy liczbę postaci $(tn \pm 2)^2 - 4$. Mamy taraz dwie możliwości:

— $(tn \pm 2)$ jest liczbą parzystą i wtedy stosujemy rozwiązanie V

— $(tn \pm 2)$ jest liczbą nieparzystą i wtedy stosujemy rozwiązanie VII

Dla $tn \pm 2$ parzystego

$$2t_1 = tn \pm 2 \longrightarrow t_1 = \frac{tn \pm 2}{2} \longrightarrow y = t_1 n = \frac{tn \pm 2}{2} n$$

Odpowiednio x to $2t_1^2 - 1$ czyli $2\left(\frac{tn \pm 2}{2}\right)^2 - 1 = \frac{(tn \pm 2)^2}{2} - 1$

Dla $tn \pm 2$ nieparzystego

$$2t_1 + 1 = tn \pm 2 \longrightarrow t_1 = \frac{tn \pm 2 - 1}{2} \longrightarrow y = 2t_1(t_1+1)n = 2n\left(\frac{tn \pm 2 - 1}{2}\right)\left(\frac{tn \pm 2 - 1}{2} + 1\right)$$

Dla $t^2 + \frac{4t}{n}$ otrzymujemy $y = 2t_1(t_1+1)n = 2n\left(\frac{tn+2-1}{2}\right)\left(\frac{tn+2-1}{2}+1\right) = n\,\frac{(tn+1)(tn+3)}{2}$

Dla $t^2 - \frac{4t}{n}$ otrzymujemy $y = 2t_1(t_1+1)n = 2n\left(\frac{tn-2-1}{2}\right)\left(\frac{tn-2-1}{2}+1\right) = n\,\frac{(tn-1)(tn-3)}{2}$

Czyli dla $D = t^2 \pm \frac{4t}{n}$ mamy $y = n\,\frac{(tn \pm 1)(tn \pm 3)}{2}$ lub po przekształceniach $y = n\,\frac{(tn \pm 2)^2 - 1}{2}$

Odpowiednio x to $(2t_1+1)(2t_1^2 + 2t_1 + 1)$ gdzie $t_1 = \frac{tn \pm 2 - 1}{2}$

Na obecnym etapie rozwiązywania RP postępujemy następująco:

- przedstawiamy D w postaci $D = t^2 \pm a \quad (t \geqslant a)$
- sprawdzamy czy tak przedstawione D podlega pod RGI do RGXI.

To proste postępowanie daje nam od razu odpowiedź, jeżeli chodzi o RGI do RGX. Dla RGXI sprawa się nieco komplikuje. Dla $n = 3$ i t podzielnego przez 3 otrzymujemy $a > t$.

$$\frac{4t}{3} = a > t$$

co jest sprzeczne z warunkiem $t \geqslant a$. Dla liczb $D = t^2 \pm \frac{4t}{3}$ odstępujemy od tego warunku.

Każde D po przedstawieniu w postaci $D = t^2 \pm a$ gdzie $t \geqslant a$ i stwierdzeniu, że nie podlega pod RGI do RGX sprawdzamy czy nie podlega pod RGXI. Sprawdzenie polega na pomnożeniu D przez 3^2.

$$\left(t^2 \pm \frac{4t}{3}\right)3^2 = (3t)^2 \pm 12t = (3t \pm 2)^2 - 4$$

Jeżeli odpowiedź wygląda jak wyżej dane D podlega pod RGXI.

Każda liczba D leży między t^2 i $(t+1)^2$ i może być przedstawiona na dwa sposoby w zależności od tego czy weźmiemy t^2 czy $(t+1)^2$. O naszym D wiemy już (po pomnożeniu przez 3^2), że podlega pod RGXI. Na przykładach pokazemy jak przekształcać takie D do postaci $t^2 \pm \frac{4t}{3}$.

D = 205 $\quad 205 \cdot 3^2 = 43^2 - 4 \quad 205 = 14^2 + 9 = 15^2 - 20 = 15^2 - \frac{4 \cdot 15}{3}$

D = 608 $\quad 608 \cdot 3^2 = 74^2 - 4 \quad 608 = 25^2 - 17 = 24^2 + 32 = 24^2 + \frac{4 \cdot 24}{3}$

$D = 205 = 15^2 - \frac{4 \cdot 15}{3}$ rozw. gł. XI

$tn = 15 \cdot 3 = 45$ nieparzyste

$y = \frac{(tn-2)^2 - 1}{2}\,n = \frac{(15 \cdot 3 - 2)^2 - 1}{2}\,3 = 2772$

$1 + 205 \cdot 2772^2 = 39689^2$

$D = 608 = 24^2 + \frac{4 \cdot 24}{3}$ rozw. gł. XI

$tn = 24 \cdot 3 = 72$ parzyste

$y = \frac{tn+2}{2}\,n = \frac{24+2}{2}\,3 = 111$

$1 + 608 \cdot 111^2 = 2737^2$

Zaletą postępowania jak wyżej jest nagroda w postaci znajdowania nie tylko rozwiązań dla $D = t^2 \pm \frac{4t}{3}$, ale także takich dla których pomnożenie D przez 3^2 daje nowe D podlegające pod rozwiązania główne.

Przykłady:

$D = 70 = 8^2 + 6$ nie podlega pod wzór $t^2 \pm \frac{4t}{3}$, bo $70 \cdot 3^2 = 630$ nie daje $t^2 - 4$, ale $630 = 25^2 + 5$, więc możemy dla tego nowego D zastosować wzór IX, co daje $y = 10$ i całkowite $y = 3 \cdot 10 = 30$.

$$1 + 70 \cdot 30^2 = 251^2$$

$D = 236 = 15^2 + 11$

$236 \cdot 3^2 = 2124 = 46^2 + 8$ —— rozwiązanie XI dla nowego D

$2124 = 46^2 + \frac{4 \cdot 46}{23} \longrightarrow$ nowe $y = \frac{46 \cdot 23 + 2}{2} = 12190 \longrightarrow$ całkowite $y = 3 \cdot 12190 = 36570$

$$1 + 236 \cdot 36570^2 = 561799^2$$

Przypadki IX, X, XI włączamy do rozwiązań głównych, czyli będzie ich w sumie XI.

Jeżeli znamy rozwiązanie dla jakiegoś D to nie ma problemu ze znalezieniem rozwiązania dla 4D. Kiedy y jest parzyste wyłączamy z niego składnik 2 i otrzymujemy 4D. Popatrzmy na ostatni przykład:

$$1 + 236 \cdot 36570^2 = 561799^2$$
$$1 + 236 \cdot 2^2 \cdot 18285^2 = 561799^2$$
$$1 + 944 \cdot 18285^2 = 561799^2$$

Kiedy y jest nieparzyste, przekształcamy takie równanie przy pomocy $\triangle$ –ty.

$$1 + 96 \cdot 5^2 = 49^2 / \triangle$$
$$1 + 96 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 49^2 = 4801^2$$
$$1 + 384 \cdot 245^2 = 4801^2$$

Liczba 4 czyli 2^2 jest dla RP liczbą szczególną. Występuje przy przekształcaniu równań przy pomocy $\triangle$ –ty. W wielu przypadkach pozwala na szybkie znalezienie rozwiązania.

Po sprawdzeniu, że jakieś D nie podlega pod RG dobrze jest pomnożyć takie D przez 4–ry i sprawdzić czy nowe D podlega pod RG.

Szczególnie skuteczne bywa to dla D postaci

$$t^2 + t - 1$$

Przykładowo:

$$t^2 - t + 1$$

$D = 155 = 12^2 + 11$	$155 \cdot 4 = 620 = 25^2 - 5$	RGIX	$D = 111 = 11^2 - 10$	$111 \cdot 4 = 444 = 21^2 + 3$	RGIX
$D = 305 = 17^2 + 16$	$305 \cdot 4 = 1220 = 35^2 - 5$	RGIX	$D = 183 = 14^2 - 13$	$183 \cdot 4 = 732 = 27^2 + 3$	RGIX
$D = 505 = 22^2 + 21$	$505 \cdot 4 = 2020 = 45^2 - 5$	RGIX	$D = 273 = 17^2 - 16$	$273 \cdot 4 = 1092 = 33^2 + 3$	RGIX
$D = 755 = 27^2 + 26$	$755 \cdot 4 = 3020 = 55^2 - 5$	RGIX	$D = 507 = 23^2 - 22$	$507 \cdot 4 = 2028 = 45^2 + 3$	RGIX

Dzieje się tak, ponieważ

$$(t^2 + t - 1) \cdot 4 = 4t^2 + 4t + 1 - 5 = (2t+1)^2 - 5$$

$$(t^2 - t + 1) \cdot 4 = 4t^2 - 4t + 1 + 3 = (2t-1)^2 + 3$$

Teraz, jeżeli liczba $2t \pm 1$ jest podzielna przez 3 lub 5 (co zachodzi stosunkowo często) to nowe D podlega pod RGIX $\left(D = t^2 \pm \frac{t}{n}\right)$.

Liczba $2t+1$ jest podzielna przez 5 jeżeli ostatnią cyfrą liczby t jest 2 lub 7.

Liczba $2t-1$ jest podzielna przez 3 jeżeli D jest podzielne przez 3.

Podobnych zależności jest więcej, np:

$$(t^2 + t - 2) \cdot 4 = 4t^2 + 4t + 1 - 9 = (2t+1)^2 - 9$$

$$(t^2 - t + 2) \cdot 4 = 4t^2 - 4t + 1 + 7 = (2t-1)^2 + 7$$

Dlatego chcąc znaleźć rozwiązanie dla konkretnego D po prostu mnożymy je przez 4–ry i sprawdzamy czy 4D jest liczbą podlegającą pod RG.

Jeszcze parę przykładów:

$D = 990 = 31^2 + 29$	$990 \cdot 4 = 3960 = 63^2 - 9$	RGIX	$D = 602 = 25^2 - 23$	$602 \cdot 4 = 2408 = 49^2 + 7$	RGIX
$D = 2448 = 49^2 + 47$	$2448 \cdot 4 = 9792 = 99^2 - 9$	RGIX	$D = 1484 = 39^2 - 37$	$1484 \cdot 4 = 5936 = 77^2 + 7$	RGIX

To samo dotyczy dzielenia. Jeżeli to możliwe dzielimy dane D przez 4–ry i jeśli to nowe D podlega pod RG znajdujemy rozwiązanie. W tym przypadku y dla nowego D jest zawsze parzyste.

Przykłady

$D = 212 = 15^2 - 13$ $\quad 212 : 4 = 53 = 7^2 + 4$ RGVIII $\quad 1 + 53 \cdot 9100^2 = 66249^2 \longrightarrow 1 + 212 \cdot 4550^2 = 66249^2$

$D = 948 = 31^2 - 13$ $\quad 948 : 4 = 237 = 15^2 + 12$ RGXI $\quad 1 + 237 \cdot 14820^2 = 228151^2 \longrightarrow 1 + 948 \cdot 7410^2 = 228151^2$

Drugą liczbą specjalną jest 5, a powód dla którego tak uważamy zostanie wyjaśniony później. Pomnożenie D przez 5^2 często prowadzi do otrzymania D które podlega pod RG.
Przykłady:

D = 41	$41 \cdot 5^2 = 1025 = 32^2 + 1$	RGII
D = 61	$61 \cdot 5^2 = 1525 = 39^2 + 4$	RGVIII
D = 185	$185 \cdot 5^2 = 4625 = 68^2 + 1$	RGII

Każda liczba D leży między t^2 i $(t+1)^2$

$$(t+1)^2 - t^2 = 2t + 1$$

Jeżeli $2t+1$ jest liczbą złożoną to możemy ją przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb. Jeśli podzielników jest więcej to łączymy je w grupy tak, żeby zawsze mieć do czynienia z dwoma podzielnikami. Np. dla $2t+1 = 105$ będą to 3 i 35, 5 i 21, 7 i 15.

Przypuśćmy, że nasze D leży pomiędzy t^2 i $(t+1)^2$ takimi, że $2t+1$ jest liczbą złożoną równą $u \cdot w$ i liczbę D możemy przedstawić w postaci:

$$D = t^2 + uk \qquad \frac{2t+1}{w} = u$$

$$D = t^2 + wk \qquad \frac{2t+1}{u} = w$$

gdzie $uk < 2t+1$ oraz $wk < 2t+1$.

Jak sie okaże warto do tych wartości D dodać:

$$D = t^2 - u \qquad D = (t+1)^2 + u$$

$$D = t^2 - w \qquad D = (t+1)^2 + w$$

Okazuje sie, ze mnożenie tak skonstruowanych liczb D przez odpowiednio u^2 lub w^2 prowadzi dosyć często do otrzymania D podlegającego pod RG.
Przykłady:

dla 10^2 i 11^2 mamy $2t+1 = 21 = 3 \cdot 7$ $\quad u = 3 \quad w = 7$

Kiedy $u = 3$ D może przyjmować wartości 97, 103, 106, 109, 112, 115, 118, 124.

Mnożenie tych D przez $w^2 = 7^2$ prowadzi do otrzymania D podlegającego pod RG kiedy

D = 115	$115 \cdot 7^2 = 75^2 + 10$	RGX
D = 124	$124 \cdot 7^2 = 78^2 - 8$	RGXI

Kiedy $w = 7$ D może przyjmować wartości 93, 107, 114, 128.

Mnożenie tych D przez $u^2 = 3^2$ prowadzi do otrzymania D podlegającego pod RG kiedy

D = 93	$93 \cdot 3^2 = 29^2 - 4$	RGVII
D = 107	$107 \cdot 3^2 = 31^2 + 2$	RGIV
D = 114	$114 \cdot 3^2 = 32^2 + 2$	RGIV
D = 128	$128 \cdot 3^2 = 34^2 - 4$	RGV

Na 12-ście możliwych przypadków rozwiązaliśmy połowę.

---

dla 13^2 i 14^2 mamy $2t+1 = 27 = 3 \cdot 9$ $\quad u = 3 \quad w = 9$

Kiedy $u = 3$ D może przyjmować wartości 166, 172, 175, 178, 181, 184, 187, 190, 193, 199.

Mnożenie tych D przez $w^2 = 9^2$ prowadzi do otrzymania D podlegającego pod RG kiedy

D = 172	$172 \cdot 9^2 = 118^2 + 8$	RGXI
D = 175	$175 \cdot 9^2 = 119^2 + 14$	RGXI

Kiedy $w = 9$ D może przyjmować wartości 160, 178, 187, 205.

Mnożenie tych D przez $u^2 = 3^2$ prowadzi do otrzymania D podlegającego pod RG kiedy

D = 160	$160 \cdot 3^2 = 38^2 - 4$	RGV

$D = 178$	$178 \cdot 3^2 = 40^2 + 2$	RGIV
$D = 187$	$187 \cdot 3^2 = 41^2 + 2$	RGIV
$D = 205$	$205 \cdot 3^2 = 43^2 - 4$	RGV

Na 14–ście możliwych przypadków rozwiązaliśmy 6–ść, ale co ciekawe wszystkie w których mnożyliśmy D przez mniejszy z podzielników. Sprawdzimy tą zależność na jeszcze jednym przykładzie.

Dla 17^2 i 18^2 mamy $2t + 1 = 35 = 5 \cdot 7$ $\quad u = 5 \quad w = 7$

Kiedy $w = 7$ D może przyjmować wartości 282, 296, 303, 310, 317, 331.

Mnożenie tych D przez $u^2 = 5^2$ prowadzi do otrzymania D podlegającego pod RG kiedy

$D = 282$	$282 \cdot 5^2 = 84^2 - 6$	RGIX
$D = 296$	$296 \cdot 5^2 = 86^2 + 4$	RGVI
$D = 303$	$303 \cdot 5^2 = 87^2 + 6$	RGXI
$D = 310$	$310 \cdot 5^2 = 88^2 + 6$	nie prowadzi do RG
$D = 317$	$317 \cdot 5^2 = 89^2 + 4$	RGXI
$D = 331$	$331 \cdot 5^2 = 91^2 - 6$	nie prowadzi do RG

Nie we wszystkich przypadkach otrzymaliśmy D podlegające pod RG, ale i tak widać, że ten sposób sprawdzania często prowadzi do szybkiego rozwiązania RP. Wśród D od 2 do 99 możemy tą metodą znaleźć rozwiązania dla D = 13, 19, 22, 28, 44, 52, 54, 59, 61, 69, 93.

Podsumowanie

Kiedy D można przedstawić w postaci:

$t^2 \pm 1$	$t^2 \pm \frac{t}{n}$
$t^2 \pm 2$	$t^2 \pm \frac{2t}{n}$
$t^2 \pm 4$	$t^2 \pm \frac{4t}{n}$

rozwiązanie RP jest proste i szybkie. Jednocześnie zrozumiałe staje się dlaczego wartości y dla nieparzystego $D = t^2 + 4$ są wyraźnie większe niż w pozostałych przypadkach rozwiązań głównych. Wystarczy porównać ze sobą wzory na y dla odpowiednich postaci D.

Pozostałe metody opisane w tym rozdziale to tylko próby sprawdzenia czy dane D można w stosunkowo prosty sposób doprowadzić do D podlegającego pod RG.

Wszystko co dotychczas powiedzieliśmy o rozwiązaniach głównych możemy przedstawić w formie tabeli (strona 21) lub graficznie (strona 22).

W tabeli na następnej stronie wprowadzono rubrykę "GRUPA". Wynika to z własności różnych liczb D i jest wyjaśnione w rozdziale "Klasyfikacja liczb D".

W formie graficznej pokazano te D dla których obecnie potrafimy znaleźć rozwiązanie. Takich D jest na tej stronie nieco więcej niż zaznaczono. Kiedy mnożymy D dla którego znamy rozwiązanie przez 4–ry najczęściej otrzymujemy nowe D, które i bez tego mnożenia podlegało pod RG.

Przykłady:

$50 \cdot 4 = 19^2 + 4$	RGVIII	$152 \cdot 4 = 25^2 - 17 = 24^2 + 32$	RGXI
$60 \cdot 4 = 15^2 + 15$	RGIX	$203 \cdot 4 = 28^2 + 28$	RGIX
$83 \cdot 4 = 18^2 + 8$	RGXI	$312 \cdot 4 = 35^2 + 23 = 36^2 - 48$	RGXI

W przypadkach kiedy mnożąc przez 4–ry nie trafiamy jak wyżej znajdujemy rozwiązanie wyłączając 2^2 z y^2 lub przekształcając rozwiązanie dla D przy pomocy $\triangle$–ty. (jak to wcześniej opisano).

Przykłady:

$D = 300$	RGXI	$300 \cdot 4 = 35^2 - 25 = 34^2 + 44$	$1 + 300 \cdot 78^2 = 1351^2 \longrightarrow 1 + 1200 \cdot 39^2 = 1351^2$
$D = 160$	RGXI	$160 \cdot 4 = 25^2 + 15 = 26^2 - 36$	$1 + 160 \cdot 57^2 = 721^2/\triangle \longrightarrow 1 + 640 \cdot 41097^2 = 1039681^2$

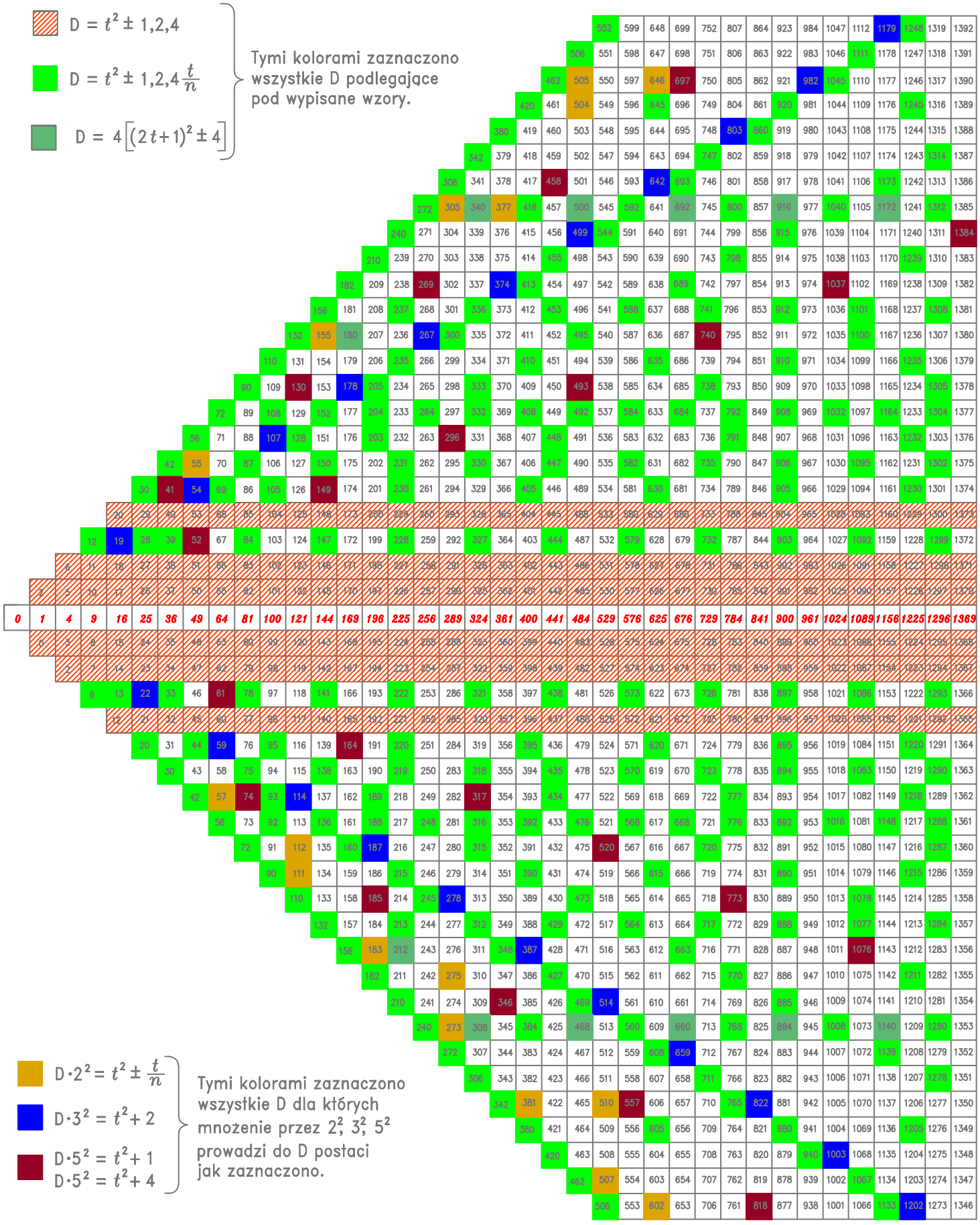
Nie zaznaczono takich D na stronie 22–giej, ponieważ ich rozkład jest chaotyczny i przesłaniałby te zależności, ktore są widoczne. Wyjątek zrobiono dla liczb postaci

$$D = 4\left[(2t+1)^2 \pm 4\right]$$

ponieważ ich rozkład jest bardzo regularny mimo, że nietypowy w porównaniu z RG.

Rozwiązania główne (RG)

D	$y = v_1$	x	Uwagi	GR.	ROZW. NUMER
t^2-1	1	t	$v_1 = 1 \quad v_2 = 1$	+1	RGI
t^2+1	$2t$	$2t^2+1$	$v_1 = 2t \quad v_2 = 1$ $v_1 = 1 \quad v_2 = 2t$	−1	RGII
t^2-2	t	t^2-1	$v_1 = t \quad v_2 = 1$ $v_1 = 1 \quad v_2 = t$	+2	RGIII
t^2+2	t	t^2+1	$v_1 = t \quad v_2 = 1$ $v_1 = 1 \quad v_2 = t$	−2	RGIV
$(2t_1)^2-4$	t_1	$2t_1^2-1$	$t = 2t_1$ $v_1 = t_1 \quad v_2 = 1$ $v_1 = 1 \quad v_2 = t_1$	+4	RGV
$(2t_1)^2+4$	t_1	$2t_1^2+1$	$t = 2t_1$ $v_1 = t_1 \quad v_2 = 1$ $v_1 = 1 \quad v_2 = t_1$	−4	RGVI
$(2t_1+1)^2-4$	$2t_1(t_1+1)$	$(2t_1+1)\times$ $\times(2t_1^2+2t_1-1)$	$t = 2t_1+1$ $v_1 = 2t_1(t_1+1) \quad v_2 = 1$ $v_1 = 1 \quad v_2 = 2t_1(t_1+1)$	+4	RGVII
$(2t_1+1)^2+4$	$4(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)\times$ $\times(2t_1^2+2t_1+1)$	$8(2t_1+1)^2\times$ $\times(t_1^2+t_1+1)^2+1$	$v_1 = \frac{y}{v_2} \quad t = 2t_1+1$ "−4" $v_2 = 1$ "+4" $v_2 = 2t_1+1$ "−1" $v_2 = \frac{(2t_1+1)^2+1}{2}$	−4, −1, +4	RGVIII
$t^2 \pm \frac{t}{n}$	$2n$	$2tn \pm 1$	$v_1 = 2n \quad v_2 = 1$ $v_1 = 1 \quad v_2 = 2n$		RGIX
$t^2 \pm \frac{2t}{n}$	n	$tn \pm 1$	$v_1 = n \quad v_2 = 1$ $v_1 = 1 \quad v_2 = n$		RGX
$t^2 \pm \frac{4t}{n}$	tn — *parzyste* $\frac{tn \pm 2}{2}\, n$ — — — — — — — — tn — *nieparzyste* $\frac{(tn \pm 2)^2-1}{2}\, n$	$\frac{(tn \pm 2)^2}{2} - 1$ — — — — — $(2t_1+1)\times$ $\times(2t_1^2+2t_1-1)$ $t_1 = \frac{tn \pm 2 - 1}{2}$	Sprawdzamy czy $D \cdot 3^2 = t^2-4$ $v_1 = y \quad v_2 = 1$ $v_1 = 1 \quad v_2 = y$ $v_1 = \frac{tn \pm 2}{2} \quad v_2 = n$ $v_1 = \frac{(tn \pm 2)^2-1}{2} \quad v_2 = n$		RGXI


$D = t^2 \pm 1,2,4$
$D = t^2 \pm 1,2,4\frac{t}{n}$
$D = 4\left[(2t+1)^2 \pm 4\right]$
Tymi kolorami zaznaczono wszystkie D podlegające pod wypisane wzory.
$D \cdot 2^2 = t^2 \pm \frac{t}{n}$
$D \cdot 3^2 = t^2 + 2$
$D \cdot 5^2 = t^2 + 1$
$D \cdot 5^2 = t^2 + 4$
Tymi kolorami zaznaczono wszystkie D dla których mnożenie przez 2^2, 3^2, 5^2 prowadzi do D postaci jak zaznaczono.

Podamy teraz po dwa przykłady dla każdego z rozwiązań głównych.

RGI

$1+24y^2=x^2$

$D=24=5^2-1$

$y=1$

$1+24\cdot1^2=5^2$

$1+63y^2=x^2$

$D=63=8^2-1$

$y=1$

$1+63\cdot1^2=8^2$

RGII

$1+26y^2=x^2$

$D=26=5^2+1$

$y=2t=10$

$1+26\cdot10^2=51^2$

$1+65y^2=x^2$

$D=65=8^2+1$

$y=2t=16$

$1+65\cdot16^2=129^2$

RGIII

$1+23y^2=x^2$

$D=23=5^2-2$

$y=t=5$

$1+23\cdot5^2=24^2$

$1+62y^2=x^2$

$D=62=8^2-2$

$y=t=8$

$1+62\cdot8^2=63^2$

RGIV

$1+27y^2=x^2$

$D=27=5^2+2$

$y=t=5$

$1+27\cdot5^2=26^2$

$1+66y^2=x^2$

$D=66=8^2-2$

$y=t=8$

$1+66\cdot8^2=65^2$

RGV

$1+32y^2=x^2$

$D=32=(2\cdot3)^2-4$

$y=t_1=3$

$1+32\cdot3^2=17^2$

$1+60y^2=x^2$

$D=60=(2\cdot4)^2-4$

$y=t_1=4$

$1+60\cdot4^2=31^2$

RGVI

$1+40y^2=x^2$

$D=40=(2\cdot3)^2+4$

$y=t_1=3$

$1+40\cdot3^2=19^2$

$1+68y^2=x^2$

$D=68=(2\cdot4)^2+4$

$y=t_1=4$

$1+68\cdot4^2=33^2$

RGVII

$1+21y^2=x^2$

$D=21=(2\cdot2+1)^2-4$

$y=2t_1(t_1+1)=2\cdot2(2+1)=12$

$1+21\cdot12^2=55^2$

$1+77y^2=x^2$

$D=77=(2\cdot4+1)^2-4$

$y=2t_1(t_1+1)=2\cdot4(4+1)=40$

$1+77\cdot40^2=351^2$

RGVIII

$1+29y^2=x^2$

$D=29=(2\cdot 2+1)^2+4$

$y=4(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)(2t_1^2+2t_1+1)=$

$=4(2\cdot 2+1)(2^2+2+1)(2\cdot 2^2+2\cdot 2+1)=$

$=1820$

$1+29\cdot 1820^2=9801^2$

$1+85y^2=x^2$

$D=85=(2\cdot 4+1)^2+4$

$y=4(2t_1+1)(t_1^2+t_1+1)(2t_1^2+2t_1+1)=$

$=4(2\cdot 4+1)(4^2+4+1)(2\cdot 4^2+2\cdot 4+1)=$

$=30996$

$1+85\cdot 30996^2=285769^2$

RGIX

$1+39y^2=x^2$

$D=39=6^2+\frac{6}{2}$

$y=2n=2\cdot 2=4$

$1+39\cdot 4^2=25^2$

$1+220y^2=x^2$

$D=220=15^2-\frac{15}{3}$

$y=2n=2\cdot 3=6$

$1+220\cdot 6^2=89^2$

RGX

$1+136y^2=x^2$

$D=136=12^2-\frac{2\cdot 12}{3}$

$y=n=3$

$1+136\cdot 3^2=35^2$

$1+219y^2=x^2$

$D=219=15^2-\frac{2\cdot 15}{5}$

$y=n=5$

$1+219\cdot 5^2=74^2$

RGXI

$1+108y^2=x^2$

$D=108=10^2+\frac{4\cdot 10}{5}$

$tn=10\cdot 5=50$ parzyste

$y=\frac{tn+2}{2}\,n=\frac{10\cdot 5+2}{2}\,5=130$

$1+108\cdot 130^2=1351^2$

$1+453y^2=x^2$

$D=453=21^2+\frac{4\cdot 21}{7}$

$tn=21\cdot 7=147$ nieparzyste

$y=\frac{(tn+2)^2-1}{2}\,n=\frac{(21\cdot 7+2)^2-1}{2}\,7=77700$

$1+453\cdot 77700^2=1653751^2$

Z wzorów na RG wynikają interesujące wnioski. Jeżeli w wyrażeniu $D=t^2\pm a\ \ t$ jest liczbą pierwszą to potrafimy znaleźć rozwiązania dla $D=t^2\pm 1,2,4,t$. Kiedy t jest liczbą złożoną (im więcej ma podzielników tym lepiej) ilość rozwiązań szybko wzrasta. Parę przykładów:

$D=7^2\pm 1,2,4,7,14,28$

$D=10^2\pm 1,2,4,5,8,10,20,40$

$D=30^2\pm 1,2,3,4,5,6,8,10.12,15,20,30,40,60,120$

$D=80^2\pm 1,2,4,5,8,10,16,20,32,40,64,80,160,320$

Liczby zaznaczone na czerwono są podzielnikami $4t$, ale podlegają już innym t.