

Zakończenie

Na kilkudziesięciu stronach pokazaliśmy jak rozwiązywać RP spełniające pewne warunki. Nie to wydaje się jednak najważniejsze. Przecież potrafimy rozwiązać każde RP metodą ułamków łańcuchowych, ale w pewnym sensie jest to metoda w której nie ma takiej finezji jak choćby przy rozwiązywaniu równań kwadratowych lub trzeciego stopnia. W mechaniczny sposób zbliżamy się do obliczenia y i x i na tym kończy się nasze zainteresowanie.

Najważniejszym wydaje się pokazanie jak powstają równania Pella i jakie zależności rządzą tymi równaniami. Znaczące miejsce można tu przyznać równaniom wyjściowym i zależności $y = v_1 \cdot v_2$ obowiązującej dla każdego D . Przekształcanie równań przy pomocy Δ -ty też ma swoje zalety. Wyjaśniło się także skąd biorą się tak duże różnice między kolejnymi D .

Równania Pella odróżniają się od innych równań tym, że można je ponumerować przyjmując wartość D za kolejny numer. Można też grupować je w zależności od sposobów rozwiązania i przynależności do określonej grupy. Raz rozwiązane równanie Pella pozostaje rozwiązane na zawsze, a jak pokazano często możemy rozwiązywać je na wiele sposobów. Chciałoby się powiedzieć, że zobaczyliśmy to równanie od wewnątrz. Tablice w rozdziale "Rozkład początkowych D" w poglądowy sposób pokazują rozkład RG, a z graficznego przedstawienia poszczególnych grup liczb D też wynikają interesujące wnioski.

W wielu dyscyplinach dużym zainteresowaniem cieszą się przypadki kiedy znajdujemy zależności między dwoma wydawałoby się nie mającymi nic wspólnego ze sobą zagadnieniami. Tu wykazaliśmy ścisły związek między równaniami kwadratowymi i równaniem Pella.

Otrzymując do rozwiązania jakieś równanie Pella możemy teraz kolejno:

- sprawdzić czy podlega pod RG, ewentualnie czy nie można w prosty sposób doprowadzić tego D do takiej postaci,
- sprawdzić czy to D podlega pod PS (przypadki specjalne),
- rozwiązać to równanie metodą ułamków łańcuchowych i znając y, v_2, p_n jeszcze raz przejrzeć je ze względu na PS.

Ogólnie biorąc poza przypadkami podlegającymi pod RG rozwiązywanie równania Pella jest dosyć pracochłonne. Jeżeli chcemy w miarę szybko uzyskać dane dotyczące y, v_2, p_n to w internecie pod adresem "<http://www.numbertheory.org/php/pell.html>" (Solving some Pell equations) znajdziemy dla danego D wartości y i v_2 oraz informację do jakiej grupy to D należy ("ręczne" sprawdzanie tej ostatniej pozycji jest dosyć nudzące). Mając te dane możemy przystąpić do obliczania p_n przy pomocy programów znajdujących się w tym opracowaniu.

Z literatury dotyczącej równania Pella wiadomo, że taka nazwa tego równania jest zupełnie przypadkowa, a właściwa to równanie Fermata, ale jest to teraz tylko jeszcze jedno przypomnienie jak było naprawdę.

I jeszcze ostatnia uwaga. Wszystko co tu napisano o równaniu Pella (!) to elementarna matematyka poparta dużą ilością przykładów, tak żeby treść tego opracowania była zrozumiała dla uczniów szkół średnich.

Kolejne dwa rozdziały "Wartości p_n dla D podlegających pod rozwiązania główne" i "Wartości p_n dla początkowych D " to tylko praktyczne zastosowanie wyprowadzonych wzorów.

To opracowanie zostało wielokrotnie przeglądnięte, ale tylko przez autora. Nie mogę więc podzielić się błędami z kimś innym, za styl też jestem odpowiedzialny. Wszelkie uwagi proszę kierować na adres: adamanigacz@gmail.com. Dziękuję.

Lista liczb D dla których rozwiązano równanie Pella na poprzednich stronach:

13, 19, 21, 23, 24, 26, 27, 29, 31, 32, 39, 40, 41, 43, 53, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 68, 69, 70, 73, 74, 77, 85, 86, 91, 93, 107, 108, 109, 111, 114, 115, 124, 128, 134, 136, 137, 139, 149, 155, 157, 160, 172, 175, 178, 179, 183, 185, 187, 193, 199, 205, 209, 211, 212, 219, 220, 236, 268, 273, 277, 279, 281, 282, 296, 297, 300, 303, 304, 305, 310, 317, 331, 338, 349, 369, 385, 407, 421, 428, 452, 453, 504, 505, 507, 509, 512, 520, 521, 536, 541, 602, 608, 610, 661, 683, 755, 844, 931, 944, 948, 964, 990, 1005, 1061, 1181, 1277, 1285, 1372, 1480, 1484, 1587, 2448.