

Równania wyjściowe

W tym rozdziale omówiono specjalny typ równań kwadratowych, takich które po przekształceniu dają RP. Przypatrzmy się poniższej równości:

$$7 - 1 - 6 = 0$$

Na pozór nic szczególnego. Możemy jednak wyobrazić sobie, że jest to równanie kwadratowe w którym jeden z pierwiastków wynosi 1 i wtedy:

$$7x^2 - 1x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 7 \cdot 6 = 13^2$$

$$1 + 42 \cdot 2^2 = 13^2$$

RP

Podobnie

$$12 - 1 - 11 = 0$$

$$12x^2 - 1x - 11 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 12 \cdot 11 = 23^2$$

$$1 + 33 \cdot 4^2 = 23^2$$

$$\text{lub } 1 + 132 \cdot 2^2 = 23^2$$

RP

albo też

$$7 - 2 - 5 = 0$$

$$7x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 \cdot 7 \cdot 5 = 12^2$$

$$1 + 35 \cdot 1^2 = 6^2$$

RP

$$13 - 2 - 11 = 0$$

$$13x^2 - 2x - 11 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 \cdot 13 \cdot 11 = 24^2$$

$$1 + 143 \cdot 1^2 = 12^2$$

RP

Spróbujmy wyrazić w ogólnej postaci to co wynika z przykładów:

$$A - B - C = 0$$

A, B, C to całkowite współczynniki liczbowe równania kwadratowego, których suma wynosi 0, a B równa się 1 lub 2. W równaniu kwadratowym takiej postaci Δ jest zawsze kwadratem liczby całkowitej, co łatwo wykazać w sposób ogólny. Tutaj niech wystarczą przytoczone wyżej przykłady.

Równania $A - 1 - C = 0$ i $A - 2 - C = 0$ są równaniami wyjściowymi dla RP, a Δ -ty tych równań to właśnie RP. W przypadku $A - 2 - C = 0$ po przekształceniu równania wyjściowego przy pomocy Δ -ty, dzielimy strony równania przez 4 i otrzymujemy RP. Dla równań Pella możemy wypisać następujące ogólne równania wyjściowe w zależności od tego czy D jest liczbą pierwszą czy nie.

Kiedy D jest liczbą pierwszą

$$Dv_2^2 - 1 - v_1^2 = 0$$

$$Dv_2^2 - 2 - v_1^2 = 0$$

$$v_1^2 - 2 - Dv_2^2 = 0$$

Kiedy D jest liczbą złożoną ($D = D_1 \cdot D_2$)

W tym przypadku mogą zachodzić równania jak wyżej, lub dodatkowo

$$D_1v_1^2 - 1 - D_2v_2^2 = 0$$

$$D_1v_1^2 - 2 - D_2v_2^2 = 0$$

Przy liczbach 1 czy 2 moglibyśmy zamiast znaku "−" pisać "+", ale nie ma to wpływu na wnioski wynikające z dalszych przekształceń.

Po przekształceniu przy pomocy $\triangle$ -ty otrzymujemy następujące RP:

$$\begin{aligned}1 + D(2v_1v_2)^2 &= x^2 \\1 + D(v_1v_2)^2 &= x^2 \\1 + D_1D_2(2v_1v_2)^2 &= x^2 \\1 + D_1D_2(v_1v_2)^2 &= x^2\end{aligned}$$

W powyższych równaniach $y = v_1v_2$ lub $y = 2v_1v_2$.

W równaniu $v_1^2 - 1 - Dv^2 = 0$ mamy od razu do czynienia z RP. Przekształcenie tego równania przy pomocy $\triangle$ -ty daje drugie po najmniejszym rozwiązaniu RP dla danego D.

Przykład: $3^2 - 1 - 8 \cdot 1^2 = 0 \longrightarrow 1 + 8 \cdot 1^2 = 3^2 / \triangle \longrightarrow 1 + 8 \cdot 6^2 = 17^2$ kolejne rozwiązanie

Jeszcze jedna sprawa wymaga wyjaśnienia. Jeżeli liczba D zawiera w sobie kwadrat liczby większej od 1 np.

$$\begin{aligned}D &= 92 = 23 \cdot 2^2 \\D &= 45 = 5 \cdot 3^2 \\D &= 75 = 3 \cdot 5^2\end{aligned}$$

nie znaczy, że poszukując rozwiązania możemy pominąć składnik kwadratowy (w domyśle włączyć go w y), ponieważ w otrzymanym rozwiązaniu niekoniecznie musi występować ten składnik.

Dla przykładu

$$\begin{aligned}D &= 245 = 5 \cdot 7^2 \\1 + 5 \cdot 4^2 &= 9^2 \\1 + 245 \cdot 3312^2 &= 51841^2\end{aligned}$$

Każde D jest można powiedzieć "indywidualnością" i posiada właściwe dla siebie rozwiązanie, które zależy od własności tego konkretnego D. Z drugiej strony, jeżeli rozwiązaliśmy RP dla jakiegoś D to możemy teraz to D łączyć z dowolnymi kwadratowymi składnikami y^2 i otrzymywać najmniejsze rozwiązania dla nowych D. Możemy też włączać kwadratowe podzielniki oryginalnego D do y^2 , ale wtedy nie będziemy mieć pewności czy jest to rozwiązanie najmniejsze (patrz strona 89).

Dla tych samych przykładów:

$$\begin{aligned}1 + 245 \cdot 3312^2 &= 51841^2 && \text{rozw. najmniejsze} \\1 + 245 (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)^2 &= 51841^2 && \text{rozw. najmniejsze} \\1 + 67720 \cdot 9^2 &= 51841^2 && \text{rozw. najmniejsze} \\1 + 5 \cdot 23184^2 &= 51841^2 && 1 + 5 \cdot 4^2 = 9^2\end{aligned}$$

Popatrzmy jak wyglądają równania wyjściowe dla wypisanych wcześniej rozwiązań dla D od 2 do 102.

D	równanie wyjściowe	RP
2	$2 \cdot 1^2 - 1 - 1^2 = 0$	$1 + 2(2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 3^2$
3	$3 \cdot 1^2 - 2 - 1^2 = 0$	$1 + 3(1 \cdot 1)^2 = 2^2$
5	$5 \cdot 1^2 - 1 - 2^2 = 0$	$1 + 5(2 \cdot 1 \cdot 2)^2 = 9^2$
6	$3 \cdot 1^2 - 1 - 2 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 6(2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 5^2$
7	$3^2 - 2 - 7 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 7(3 \cdot 1)^2 = 8^2$
8	$2 \cdot 1^2 - 1 - 1^2 = 0$	$1 + 8(1 \cdot 1)^2 = 3^2$
10	$10 \cdot 1^2 - 1 - 3^2 = 0$	$1 + 10(2 \cdot 1 \cdot 3)^2 = 19^2$
11	$11 \cdot 1^2 - 2 - 3^2 = 0$	$1 + 11(1 \cdot 3)^2 = 10^2$
12	$4 \cdot 1^2 - 1 - 3 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 12(2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 7^2$
13	$13 \cdot 5^2 - 1 - 18^2 = 0$	$1 + 13(2 \cdot 5 \cdot 18)^2 = 649^2$
14	$2 \cdot 2^2 - 1 - 7 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 14(2 \cdot 2 \cdot 1)^2 = 15^2$
15	$5 \cdot 1^2 - 2 - 3 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 15(1 \cdot 1)^2 = 4^2$
17	$17 \cdot 1^2 - 1 - 4^2 = 0$	$1 + 17(2 \cdot 1 \cdot 4)^2 = 33^2$
18	$18 \cdot 1^2 - 2 - 4^2 = 0$	$1 + 18(1 \cdot 4)^2 = 17^2$

D	równanie wyjściowe	RP
19	$13^2 - 2 - 19 \cdot 3^2 = 0$	$1 + 19(13 \cdot 3)^2 = 170^2$
20	$5 \cdot 1^2 - 1 - 4 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 20(2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 9^2$
21	$7 \cdot 2^2 - 1 - 3 \cdot 3^2 = 0$	$1 + 21(2 \cdot 2 \cdot 3)^2 = 55^2$
22	$11 \cdot 3^2 - 1 - 2 \cdot 7^2 = 0$	$1 + 22(2 \cdot 3 \cdot 7)^2 = 197^2$
23	$5^2 - 2 - 23 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 23(5 \cdot 1)^2 = 24^2$
24	$3 \cdot 1^2 - 1 - 2 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 24(1 \cdot 1)^2 = 5^2$
26	$26 \cdot 1^2 - 1 - 5^2 = 0$	$1 + 26(2 \cdot 1 \cdot 5)^2 = 51^2$
27	$27 \cdot 1^2 - 2 - 5^2 = 0$	$1 + 27(1 \cdot 5)^2 = 26^2$
28	$4 \cdot 4^2 - 1 - 7 \cdot 3^2 = 0$	$1 + 28(2 \cdot 4 \cdot 3)^2 = 127^2$
29	$29 \cdot 13^2 - 1 - 70^2 = 0$	$1 + 29(2 \cdot 13 \cdot 70)^2 = 9801^2$
30	$6 \cdot 1^2 - 1 - 5 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 30(2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 11^2$
31	$39^2 - 2 - 31 \cdot 7^2 = 0$	$1 + 31(39 \cdot 7)^2 = 1520^2$
32	$3^2 - 1 - 8 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 32(3 \cdot 1)^2 = 17^2$
33	$3 \cdot 2^2 - 1 - 11 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 33(2 \cdot 2 \cdot 1)^2 = 23^2$
34	$2 \cdot 3^2 - 1 - 17 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 34(2 \cdot 3 \cdot 1)^2 = 35^2$
35	$7 \cdot 1^2 - 2 - 5 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 35(1 \cdot 1)^2 = 6^2$
37	$37 \cdot 1^2 - 1 - 6^2 = 0$	$1 + 37(2 \cdot 1 \cdot 6)^2 = 73^2$
38	$19 \cdot 1^2 - 1 - 2 \cdot 3^2 = 0$	$1 + 38(2 \cdot 1 \cdot 3)^2 = 37^2$
39	$13 \cdot 1^2 - 1 - 3 \cdot 2^2 = 0$	$1 + 39(2 \cdot 1 \cdot 2)^2 = 25^2$
40	$10 \cdot 1^2 - 1 - 3^2 = 0$	$1 + 40(1 \cdot 3)^2 = 19^2$
41	$41 \cdot 5^2 - 1 - 32^2 = 0$	$1 + 41(2 \cdot 5 \cdot 32)^2 = 2049^2$
42	$7 \cdot 1^2 - 1 - 6 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 42(2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 13^2$
43	$43 \cdot 9^2 - 2 - 59^2 = 0$	$1 + 43(9 \cdot 59)^2 = 3482^2$
44	$10^2 - 1 - 11 \cdot 3^2 = 0$	$1 + 44(10 \cdot 3)^2 = 199^2$
45	$9 \cdot 3^2 - 1 - 5 \cdot 4^2 = 0$	$1 + 45(2 \cdot 3 \cdot 4)^2 = 161^2$
46	$2 \cdot 78^2 - 1 - 23 \cdot 23^2 = 0$	$1 + 46(2 \cdot 78 \cdot 23)^2 = 24335^2$
47	$7^2 - 2 - 47 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 47(7 \cdot 1)^2 = 48^2$
48	$4 \cdot 1^2 - 1 - 3 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 48 \cdot 1^2 = 7^2$
50	$50 \cdot 1^2 - 1 - 7^2 = 0$	$1 + 50(2 \cdot 1 \cdot 7)^2 = 99^2$
51	$51 \cdot 1^2 - 2 - 7^2 = 0$	$1 + 51(1 \cdot 7)^2 = 50^2$
52	$13 \cdot 5^2 - 1 - 18^2 = 0$	$1 + 52(5 \cdot 18)^2 = 649^2$
53	$53 \cdot 25^2 - 1 - 182^2 = 0$	$1 + 53(2 \cdot 25 \cdot 182)^2 = 66249^2$
54	$27 \cdot 3^2 - 1 - 2 \cdot 11^2 = 0$	$1 + 54(2 \cdot 3 \cdot 11)^2 = 485^2$
55	$5 \cdot 3^2 - 1 - 11 \cdot 2^2 = 0$	$1 + 55(2 \cdot 3 \cdot 2)^2 = 89^2$
56	$8 \cdot 1^2 - 1 - 7 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 56(2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 15^2$
57	$19 \cdot 2^2 - 1 - 3 \cdot 5^2 = 0$	$1 + 57(2 \cdot 2 \cdot 5)^2 = 151^2$
58	$58 \cdot 13^2 - 1 - 9^2 \cdot 11^2 = 0$	$1 + 58(2 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 11)^2 = 19603^2$
59	$59 \cdot 3^2 - 2 - 23^2 = 0$	$1 + 59(3 \cdot 23)^2 = 530^2$
60	$4 \cdot 2^2 - 1 - 15 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 60(2 \cdot 2 \cdot 1)^2 = 31^2$
61	$61 \cdot 3805^2 - 1 - 29718^2 = 0$	$1 + 61(2 \cdot 3805 \cdot 29718)^2 = 1766319049^2$
62	$2 \cdot 4^2 - 1 - 31 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 62(2 \cdot 4 \cdot 1)^2 = 63^2$
63	$9 \cdot 1^2 - 2 - 7 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 63(1 \cdot 1)^2 = 8^2$
65	$65 \cdot 1^2 - 1 - 8^2 = 0$	$1 + 65(2 \cdot 1 \cdot 8)^2 = 129^2$

D	równanie wyjściowe	RP
66	$33 \cdot 1^2 - 1 - 2 \cdot 4^2 = 0$	$1 + 66 (2 \cdot 1 \cdot 4)^2 = 65^2$
67	$67 \cdot 27^2 - 2 - 221^2 = 0$	$1 + 67 (27 \cdot 221)^2 = 48842^2$
68	$17 \cdot 1^2 - 1 - 4 \cdot 2^2 = 0$	$1 + 68 (2 \cdot 1 \cdot 2)^2 = 33^2$
69	$3 \cdot 36^2 - 1 - 23 \cdot 13^2 = 0$	$1 + 69 (2 \cdot 36 \cdot 13)^2 = 7775^2$
70	$14 \cdot 3^2 - 1 - 5 \cdot 5^2 = 0$	$1 + 70 (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 251^2$
71	$59^2 - 2 - 71 \cdot 7^2 = 0$	$1 + 71 (59 \cdot 7)^2 = 3480^2$
72	$9 \cdot 1^2 - 1 - 8 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 72 (2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 17^2$
73	$73 \cdot 125^2 - 1 - 1068^2 = 0$	$1 + 73 (2 \cdot 125 \cdot 1068)^2 = 2281249^2$
74	$74 \cdot 5^2 - 1 - 43^2 = 0$	$1 + 74 (2 \cdot 5 \cdot 43)^2 = 3699^2$
75	$3 \cdot 3^2 - 2 - 25 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 75 (3 \cdot 1)^2 = 26^2$
76	$4 \cdot 85^2 - 1 - 19 \cdot 39^2 = 0$	$1 + 76 (2 \cdot 85 \cdot 39)^2 = 57799^2$
77	$11 \cdot 4^2 - 1 - 7 \cdot 5^2 = 0$	$1 + 77 (2 \cdot 4 \cdot 5)^2 = 351^2$
78	$3 \cdot 3^2 - 1 - 26 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 78 (2 \cdot 3 \cdot 1)^2 = 53^2$
79	$9^2 - 2 - 79 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 79 (9 \cdot 1)^2 = 80^2$
80	$5 \cdot 1^2 - 1 - 4 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 80 (1 \cdot 1)^2 = 9^2$
82	$82 \cdot 1^2 - 1 - 9^2 = 0$	$1 + 82 (2 \cdot 1 \cdot 9)^2 = 163^2$
83	$83 \cdot 1^2 - 2 - 9^2 = 0$	$1 + 83 (1 \cdot 9)^2 = 82^2$
84	$28 \cdot 1^2 - 1 - 3 \cdot 3^2 = 0$	$1 + 84 (2 \cdot 1 \cdot 3)^2 = 55^2$
85	$85 \cdot 41^2 - 1 - 378^2 = 0$	$1 + 85 (2 \cdot 41 \cdot 378)^2 = 285769^2$
86	$43 \cdot 11^2 - 1 - 2 \cdot 51^2 = 0$	$1 + 86 (2 \cdot 11 \cdot 51)^2 = 10405^2$
87	$29 \cdot 1^2 - 2 - 3 \cdot 3^2 = 0$	$1 + 87 (1 \cdot 3)^2 = 28^2$
88	$11 \cdot 3^2 - 1 - 2 \cdot 7^2 = 0$	$1 + 88 (3 \cdot 7)^2 = 197^2$
89	$89 \cdot 53^2 - 1 - 500^2 = 0$	$1 + 89 (2 \cdot 53 \cdot 500)^2 = 500001^2$
90	$10 \cdot 1^2 - 1 - 9 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 90 (2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 19^2$
91	$7 \cdot 15^2 - 2 - 13 \cdot 11^2 = 0$	$1 + 91 (15 \cdot 11)^2 = 1574^2$
92	$24^2 - 1 - 23 \cdot 5^2 = 0$	$1 + 92 (24 \cdot 5)^2 = 1151^2$
93	$31 \cdot 14^2 - 1 - 3 \cdot 45^2 = 0$	$1 + 93 (2 \cdot 14 \cdot 45)^2 = 12151^2$
94	$2 \cdot 732^2 - 1 - 47 \cdot 151^2 = 0$	$1 + 94 (2 \cdot 732 \cdot 151)^2 = 2143295^2$
95	$5 \cdot 2^2 - 1 - 19 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 95 (2 \cdot 2 \cdot 1)^2 = 39^2$
96	$5^2 - 1 - 24 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 96 (5 \cdot 1)^2 = 49^2$
97	$97 \cdot 569^2 - 1 - 5604^2 = 0$	$1 + 97 (2 \cdot 569 \cdot 5604)^2 = 62809633^2$
98	$2 \cdot 5^2 - 1 - 49 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 98 (2 \cdot 5 \cdot 1)^2 = 99^2$
99	$11 \cdot 1^2 - 2 - 9 \cdot 1^2 = 0$	$1 + 99 (1 \cdot 1)^2 = 10^2$
101	$101 \cdot 1^2 - 1 - 10^2 = 0$	$1 + 101 (2 \cdot 1 \cdot 10)^2 = 201^2$
102	$51 \cdot 1^2 - 1 - 2 \cdot 5^2 = 0$	$1 + 102 (2 \cdot 1 \cdot 5)^2 = 101^2$

Wyjaśniliśmy mechanizm powstawania RP. Nie wiemy na razie jak obliczać wartości v_1 i v_2 , ale oczywiście jest, że znajomość jednej z nich pozwala na rozwiązanie danego RP.