

Wstęp

Równanie Pella (w skrócie RP) zapisuje się zwykle w postaci:

$$1 + Dy^2 = x^2$$

gdzie D to dowolna liczba naturalna nie będąca kwadratem.*

Mówiąc o rozwiązaniu RP mamy na myśli znalezienie najmniejszych możliwych, całkowitych i dodatnich wartości x i y . Każde równanie Pella posiada rozwiązanie w liczbach naturalnych, a w zasadzie cztery rozwiązania różniące się znakami. Dowód znaleźć można w każdym obszerniejszym opracowaniu na temat teorii liczb i jest on elementarny, choć nieco długi.

Równanie Pella, czy też jakiegokolwiek inne równanie z dwoma niewiadomymi łatwo rozwiązujemy podstawiając jakąś wartość za jedną z niewiadomych i otrzymując drugą. Przypuśćmy, że przyjmujemy za y wartości całkowite zaczynając od 1. Bardzo szybko stwierdzimy, że całkowite wartości x pojawiają się rzadko, a najczęściej nie jesteśmy w stanie znaleźć odpowiedzi tą metodą.

Na przykład dla $D = 2$ mamy:

$$1 + 2 \cdot 2^2 = 3^2$$

Już druga próba daje rozwiązanie. Dla $D = 13$ musielibyśmy wykonać tych prób znacznie więcej, bo

$$1 + 13 \cdot 180^2 = 649^2$$

co nie jest niczym niezwykłym, jeżeli popatrzyć na rozwiązanie dla $D = 61$.

$$1 + 61 \cdot 226153980^2 = 1766319049^2$$

I jeszcze parę innych przypadków:

D	y	x
1515		13
1516	8602591618573944625072398763290	334949171001860160500111891352199
1621	1564293243699791121284455833450 9833862755204387482410839917792 2442751050500	629810181249373234303497450009145 781552994230866705141285735231016 9665125001
9781	481555987608244030266147792542510 998761377122900914642608201319656 219876869703092098031271657820812 898619098912734840675950748924167 3054751368237330579140	476253759140903459015557037148038 242693916217081970911219193915687 212965387149749210085965745753950 599752054760793982856538711730939 866434465866978234993801

Zresztą najlepiej zrobimy przypatrując się rozwiązaniom dla D od 2 do 102.

*Jeżeli D jest kwadratem wtedy mamy:

$$1 = x^2 - D^2 y^2,$$

$$1 = (x - Dy)(x + Dy)$$

co dla naturalnych D, x, y jest niemożliwe.

D	x	y	D	x	y
2	3	2	54	485	66
3	2	1	55	89	12
5	9	4	56	15	2
6	5	2	57	151	20
7	8	3	58	19603	2574
8	3	1	59	530	69
10	19	6	60	31	4
11	10	3	61	1766319049	226153980
12	7	2	62	63	8
13	649	180	63	8	1
14	15	4	65	129	16
15	4	1	66	65	8
17	33	8	67	48842	5967
18	17	4	68	33	4
19	170	39	69	7775	936
20	9	2	70	251	30
21	55	12	71	3480	413
22	197	42	72	17	2
23	24	5	73	2281249	267000
24	5	1	74	3699	430
26	51	10	75	26	3
27	26	5	76	57799	6630
28	127	24	77	351	40
29	9801	1820	78	53	6
30	11	2	79	80	9
31	1520	273	80	9	1
32	17	3	82	163	18
33	23	4	83	82	9
34	35	6	84	55	6
35	6	1	85	285769	30996
37	73	12	86	10405	1122
38	37	6	87	28	3
39	25	4	88	197	21
40	19	3	89	50001	53000
41	2049	320	90	19	2
42	13	2	91	1574	165
43	3482	531	92	1151	120
44	199	30	93	12151	1260
45	161	24	93	2143295	221064
46	24335	3588	95	39	4
47	48	7	96	49	5
48	7	1	97	62809633	6377352
50	99	14	98	99	10
51	50	7	99	10	1
52	649	90	101	201	20
53	66249	9100	102	101	10

Zadziwiające jest jak bardzo mogą różnić się od siebie wartości y i x dla prawie tych samych D . Mimo wszystko można tu zaobserwować wiele regularności, co postaramy się wykorzystać. Przedtem jednak dobrze byłoby odpowiedzieć sobie na pytanie skąd bierze się RP.