

Skrót opracowania

Przypatrując się rozwiązaniom kilkudziesięciu początkowych równań Pella można dopatrzeć się związków pozwalających rozwiązać równanie Pella dla wartości D jak niżej.

$D = t^2 \pm 1, 2, 4$	y
$t^2 - 1$	1
$t^2 + 1$	$2t$
$t^2 - 2$	t
$t^2 + 2$	t
$(2t_1)^2 - 4$	t_1
$(2t_1)^2 + 4$	t_1
$(2t_1 + 1)^2 - 4$	$2t_1(t_1 + 1)$
$(2t_1 + 1)^2 + 4$	$4(2t_1 + 1)(t_1^2 + t_1 + 1) \times$ $\times (2t_1^2 + 2t_1 + 1)$

$D = t^2 \pm 1, 2, 4 \frac{t}{n}$	y
$t^2 \pm \frac{t}{n}$	$2n$
$t^2 \pm \frac{2t}{n}$	n
$t^2 \pm \frac{4t}{n}$	$tn - \text{parzyste}$ $\frac{tn \pm 2}{2} n$
	$tn - \text{nieparzyste}$ $\frac{(tn \pm 2)^2 - 1}{2} n$

Znając powyższe wzory i przyczyny dla których tak wyglądają można wyprowadzić wzór na ogólne równanie Pella.

$$\pm 1, 2, 4 a^n + D p_{n-1}^2 = m^2 \quad D = t^2 \pm a \quad t \geq a^*$$

Jeżeli z liczb $\pm 1, 2, 4$ wybierzemy $+1$, zamiast p_{n-1} wstawimy y , w miejsce m napiszemy x i przyjmujemy $n = 0$ to otrzymamy równanie Pella.

$$1 + D y^2 = x^2$$

Poniżej rozpisano ogólne równanie Pella dla początkowych wartości n .

$$\begin{aligned} 1 + D y^2 &= x^2 & y &= v_1 v_2 \\ \pm 1, 2, 4 a^0 + D v_2^2 &= m^2 \\ \pm 1, 2, 4 a^1 + D p_0^2 &= m_0^2 \\ \pm 1, 2, 4 a^2 + D p_1^2 &= m_1^2 \\ \pm 1, 2, 4 a^3 + D p_2^2 &= m_2^2 \\ \pm 1, 2, 4 a^4 + D p_3^2 &= m_3^2 \\ \pm 1, 2, 4 a^5 + D p_4^2 &= m_4^2 \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Znajomość któregośkolwiek z tych równań (a nawet ich znajomość w postaci wymagającej uzupełnienia) pozwala na szybkie rozwiązanie równania Pella.

* dobrze, gdy ten warunek jest spełniony, ale nie jest konieczny, co wyjaśni się w trakcie lektury.