

Wprowadzenie

W tym opracowaniu opisano proste i szybkie metody rozwiązywania równania Pella dla D które spełniają pewne warunki. Opracowanie jest dosyć obszerne, a powodem jest duża ilość przykładów. Dla zrozumienia wszystkich opisywanych metod wystarcza znajomość rozwiązywania równań kwadratowych.

Dla osób które mogłyby się zetknąć po raz pierwszy z równaniem Pella w tym miejscu wskazane jest (a w zasadzie niezbędne) wcześniejsze zapoznanie się z historią tego równania i sposobami rozwiązywania.

Dla zachęty trzy przykłady.

$$D = 53$$

$$53 = 7^2 + 4 = (2 \cdot 3 + 1)^2 + 4 = (2t_1 + 1)^2 + 4$$

dla liczb tej postaci

$$y = 4(2t_1 + 1)(t_1^2 + t_1 + 1)(2t_1^2 + 2t_1 + 1) = 4(2 \cdot 3 + 1)(3^2 + 3 + 1)(2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1) = 9100$$

$$1 + 53 \cdot 9100^2 = 66249^2$$

Odpowiedź skąd wziął się ten wzór na kolejnych stronach.

$$D = 453$$

$$D = 453 = 21^2 + 12 = 21^2 + \frac{4 \cdot 21}{7} = t^2 + \frac{4t}{n} \longrightarrow t = 21 \quad n = 7$$

$$tn = 21 \cdot 7 = 147 \text{ nieparzyste}$$

$$y = \frac{(tn + 2)^2 - 1}{2} \quad n = \frac{(21 \cdot 7 + 2)^2 - 1}{2} \quad 7 = 77700$$

$$1 + 453 \cdot 77700^2 = 1653751^2$$

Odpowiedź skąd
.....

$$D = 964$$

$$964 = 31^2 + 3 \longrightarrow t = 31 \quad a = 3 \quad \text{znak "+"} \quad \text{grupa "-4"}$$

$$4 \cdot 3^5 + 964 \cdot 1^2 = 44^2$$

$$\text{stąd } p_4 = 1 \quad n = 3 \longrightarrow p_3 = 25 \quad p_2 = 517 \quad p_1 = 10693 \quad p_0 = 221161 \quad v_2 = 4574225$$

$$964 \cdot 4574225^2 = 142022136^2 + 4 \quad \text{RGVI} \longrightarrow t = 142022136 \quad u_1 = t_1 = 71011068$$

$$y = u_1 \cdot v_2 = 71011068 \cdot 4574225 = 324820602522300$$

$$1 + 964 \cdot 324820602522300^2 = 10085143557001249^2$$

Odpowiedź skąd
.....

Z kolei odpowiedź na pytanie skąd moje zainteresowanie równaniem Pella przekracza znacznie rozmiary miejsca przeznaczonego na "Wprowadzenie". Niech wystarczy odpowiedź, że jedną z przyczyn była lektura "Recreations in the Theory of Numbers" (autor Albert H. Beiler), a szczególnie rozdziału "The Pellian", gdzie poza innymi istotnymi informacjami podano rozwiązania równania Pella dla kilkudziesięciu pierwszych wartości D . Przypatrywanie się tym rozwiązaniom pozwoliło na znalezienie pewnych zależności, a następnie kolejnych i kolejnych.....